第十次作业

1. 计算下列实矩阵的所有特征值和与特征值相关的特征向量:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. 设 $A \in \mathrm{M}_n(F)$ 是如下分块上三角形 $\begin{pmatrix} A_1 & * & * & \cdots & * \\ O & A_2 & * & \cdots & * \\ O & O & A_3 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & * \\ O & O & O & \cdots & A_k \end{pmatrix}$. 证明: $\chi_A = \chi_{A_1} \cdots \chi_{A_k}$.

3. 设 $A \in \mathrm{M}_n(F)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{spec}_F(A)$ 且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$. 设 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in F^n$ 分别是 A 关于 λ_1 和 λ_2 的特征向量. 证明: $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ 不是 A 的特征向量.

4. 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(F)$ 且 $A \sim_s B$.

   (i) 证明: $\mathrm{spec}_F(A) = \mathrm{spec}_F(B)$.

   (ii) 设 $\lambda \in \mathrm{spec}_F(A)$, V_A^λ 是 A 关于 λ 的特征子空间, V_B^λ 是 B 关于 λ 的特征子空间. 证明: $\dim(V_A^\lambda) = \dim(V_B^\lambda)$.

   (iii) 设 $A = P^{-1}BP$, 其中 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$. 则 $\mathbf{v} \in V_A^\lambda$ 当且仅当 $P\mathbf{v} \in V_B^\lambda$.

5. (选做) 设 V 是域 F 上的 n 维线性空间, $\mathcal{A}$ 是 V 上的线性算子. 证明: $\mathcal{A}$ 的极小多项式 $\mu_{\mathcal{A}}$ 的次数小于或等于 n.

   (提示: 利用 “同归于尽” 向量)