第十一次作业

1. 设 $S=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. 说明 S 作为实矩阵不可对角化, 但作为复矩阵可对角化.

2. 设 $\mathcal{D}:\mathbb{R}[x]_{<n}\to\mathbb{R}[x]_{<n}$ 由 $p(x)\mapsto dp/dx$ 给出. 令 $\mathcal{A}=x\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{B}=(\mathcal{D}+\mathcal{E})^2$

   (i) 验证 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 都是 $\mathbb{R}[x]_{<n}$ 上的线性算子.

   (ii) 判断 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是否可以对角化, 并说明理由.

3. 设 $\mathcal{A}$ 是域 F 上的线性算子, $\lambda\in\mathrm{spec}_F(\mathcal{A})$. 再设 $\mathbf{v}\in V$ 是 $\mathcal{A}$ 关于 λ 的特征向量. 证明: 对任意 $f\in F[t]$, $f(\lambda)\in\mathrm{spec}_F(f(\mathcal{A}))$, $\mathbf{v}$ 是 $f(\mathcal{A})$ 关于 $f(\lambda)$ 的特征向量.

4. 设线性算子 $\mathcal{A}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 在标准基下的矩阵是 $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$. 设 $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ 和 $\mathbf{w}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. 计算循环子空间 $\mathbb{R}[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{v}$ 和 $\mathbb{R}[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{w}$ 的维数.

5. 设 $\mathcal{A}$ 是域 F 上有限维线性空间上的线性算子, V 是 $\mathcal{A}$-循环的. 证明: 如果 $V=V_1\oplus V_2$, 其中 V_1,V_2 都是 $\mathcal{A}$-子空间, 则 V_1 和 V_2 也是 $\mathcal{A}$ 循环的.

6. (选做) 设 $f(t)=t^n+f_{n-1}t^{n-1}+\cdots+f_1t+f_0\in F[t]$, 其中 $f_i\in F$. 再设

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -f_0\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -f_1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -f_{n-2}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -f_{n-1}\end{pmatrix}\in\mathrm{M}_n(F).$$

   证明: $\chi_A(t)=f(t)$.

   注: 本习题说明任何一个首一多项式都是某个矩阵的特征多项式.