

第十二次作业

1. 设二阶实矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

对任意 $m \in \mathbb{N}$, 计算 A^m 和 B^m .

2. 设 F 是域,

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

计算

$$\begin{pmatrix} J_2 & O \\ O & J_2 \end{pmatrix}_{4 \times 4}, \quad \begin{pmatrix} J_2 & O \\ O & J_3 \end{pmatrix}_{5 \times 5} \quad \text{和} \quad \begin{pmatrix} J_2 & O & O \\ O & J_3 & O \\ O & O & J_3 \end{pmatrix}_{8 \times 8}$$

的秩, 特征多项式, 极小多项式和所有特征子空间的维数.

3. 设 \mathcal{A} 是域 F 上 n 维线性空间上的线性算子, $n > 0$. 证明: \mathcal{A} 既是可对角化的又是循环的当且仅当 \mathcal{A} 在 F 中有 n 个互不相同的特征值.

4. 设 $A \in M_5(\mathbb{C})$ 且 $\chi_A = (t-3)^4(t-2)$.

(i) 当 $\text{rank}(A - 3E) = 1$ 时, 计算 J_A .

(ii) 当 $\text{rank}(A - 3E) = 2$ 时, 计算 J_A .

5. (选做) 设 V 是实数域 \mathbb{R} 上的线性空间, $V \neq \{\mathbf{0}\}$, \mathcal{A} 是 V 上的线性算子. 证明: \mathcal{A} 有一维或二维不变子空间. 提示: 因为 $\mu_{\mathcal{A}}(t) \in \mathbb{R}[t]$, 所以它有一次或二次不可约因子 (见上学期第十六周讲义推论 3.9).

注: 本习题将在第三章中做为引理使用.