

# 第十三次作业

1. 设  $\mathbb{R}^3$  是标准欧式空间,  $\mathbf{x} = (1, 1, 1)^t$  和  $\mathbf{y} = (-2, 0, 1)^t$ . 计算  $(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ ,  $\|\mathbf{x}\|$ ,  $\|\mathbf{y}\|$  和  $\mathbf{x}$  与  $\mathbf{y}$  的夹角.

2. 设  $V$  是欧式空间,  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$ , 它们的 Gram 矩阵是  $G = ((\mathbf{v}_i|\mathbf{v}_j))_{k \times k}$ . 证明:  $G$  是半正定的, 且  $G$  正定当且仅当  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  线性无关.

3. 设  $\mathbb{R}^4$  是标准欧式空间,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

计算  $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$  的一组单位正交基.

4. 设  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$  是欧式空间  $V$  的单位正交向量,  $\mathbf{x} \in V$ . 证明:

(i)  $\|\mathbf{x}\|^2 \geq \sum_{i=1}^m (\mathbf{x}|\mathbf{e}_i)^2$

(ii) 如果  $\mathbf{x} \in \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m \rangle$ , 则上面的不等式取等号.

5. 设  $V$  是有限维欧式空间,  $U_1, U_2 \subset V$  是子空间. 证明:

$$(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp.$$

6. 设  $A \in M_5(\mathbb{C})$  且  $\chi_A = (t-3)^4(t-2)$ . 再设  $\text{rank}(A-3E) = 3$ . 列出  $J_A$  的所有可能性并说明理由.