第十四次作业

1. 设 $\mathbb{R}^4$ 是标准欧式空间, 子空间 $U \subset \mathbb{R}^4$ 是线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

的解空间. 计算 $U^\perp$ 的一组单位正交基.

2. 设 P 是 n 阶正交矩阵. 证明: 如果 P 是上三角的, 则 P 是对角的.

3. 欧拉旋转矩阵是 $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, 其中

$$a_{11} = \cos(\psi)\cos(\phi) - \cos(\theta)\sin(\phi)\sin(\psi), \quad a_{12} = \cos(\psi)\sin(\phi) + \cos(\theta)\cos(\phi)\sin(\psi),$$

$$a_{13} = \sin(\psi)\sin(\theta), \quad a_{21} = -\sin(\psi)\cos(\phi) - \cos(\theta)\sin(\phi)\cos(\psi),$$

$$a_{22} = -\sin(\psi)\sin(\phi) + \cos(\theta)\cos(\phi)\cos(\psi), \quad a_{23} = \cos(\psi)\sin(\theta),$$

$$a_{31} = \sin(\theta)\sin(\phi), \quad a_{32} = -\sin(\theta)\cos(\phi), \quad a_{33} = \cos(\theta).$$

设:

$$D = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

验证 $A = BCD$ (至少验证三个系数), 并证明 A 是正交矩阵.

4. 设 V 是 n 维欧式空间, $n > 1$, $\mathbf{v}$ 是 V 中的一个单位向量. 设

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{A}: & V & \to & V \\ & \mathbf{x} & \mapsto & 2(\mathbf{x}|\mathbf{v})\mathbf{v} - \mathbf{x}. \end{array}$$

(i) 证明: $\mathcal{A}$ 是线性算子.

(ii) 证明: $\mathcal{A}$ 既是对称算子又是正交算子.

(iii) 计算 $\mathcal{A}$ 的所有特征子空间的维数.

5. 设 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$. 列出 J_A 的所有可能性并说明理由.