

第十五次作业

1. 设实对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

已知 A 的特征多项式等于 $(t-1)^2(t-10)$. 计算正交矩阵 P 和对角矩阵 D 使得

$$P^t A P = D.$$

2. 设实对称方阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其特征多项式是 $(t-1)^2(t+1)^2$. 求正交矩阵 P 和对角矩阵 B 使得 $B = P^{-1}AP$.

3. 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 是正规矩阵, E 代表 n 阶单位阵. 证明:

- (i) $E + A$ 也是正规矩阵;
- (ii) 如果 A 的实特征根都大于 -1 , 则 $\det(E + A) > 0$.

4. (i) 设 P 是 n 阶正交矩阵. 证明: $-n \leq \operatorname{tr}(P) \leq n$.

(ii) 设 $A, B \in \operatorname{SM}_n(\mathbb{R})$ 都正定. 证明: 如果 $A - B$ 正定, 则 $B^{-1} - A^{-1}$ 正定.

5. 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 是斜对称的.

- (i) 证明: $\det(E + A) \geq 1$, 其中 E 是 n 阶单位方阵.
- (ii) 再设 $B \in \operatorname{SM}_n(\mathbb{R})$ 正定. 证明: $\det(A + B) \geq \det(B)$.