

第二次作业

1. 设 $f = x^5 - 12x^3 + 36x - 12 \in \mathbb{Q}[x]$. 判断 f 是不是不可约多项式.
2. 设 $f(x) \in \mathbb{R}[x] \setminus \mathbb{R}$ 且 f 没有实根. 利用微积分和代数知识给出 $f(x)$ 恒正或恒负的两个不同的证明.
3. 设 F 是域. 验证: $U \subset M_n(F)$ 是不是子空间, 其中
 - (i) $U = \{A \in M_n(F) \mid \text{tr}(A) = 0\}$,
 - (ii) $U = \{A \in M_n(F) \mid \det(A) = 0\}$,
 - (iii) $U = \{A \in M_n(F) \mid AA^t = O\}$ 且 $F = \mathbb{R}$. (提示: 见上学期第十四周讲义例 4.13).
4. 设 F 是域, $f, g \in \text{Map}(S, F)$. 证明: f 和 g 线性无关当且仅当存在 $x, y \in S$ 使得

$$\det \begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f(y) & g(y) \end{pmatrix} \neq 0.$$

5. 设 V_1, \dots, V_k 是线性空间 V 的子空间, 且 $V_1 + \dots + V_k$ 是直和. 证明:
 - (i) 如果 $\mathbf{v}_i \in V_i \setminus \{\mathbf{0}\}$, $i = 1, \dots, k$, 则 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 线性无关,
 - (ii) 如果 $S_i \subset V_i$ 是线性无关集, $i = 1, \dots, k$, 则 $S_1 \cup \dots \cup S_k$ 是线性无关集.