

第三次作业

约定: 以下 F 是域.

1. 设 $A \in F^{m \times s}$. 定义:

$$\begin{aligned} L_A: F^{s \times n} &\rightarrow F^{m \times n} \\ X &\mapsto AX. \end{aligned}$$

验证 L_A 是线性映射, 且 L_A 是单射当且仅当 A 列满秩.

2. 定义:

$$\begin{aligned} \Delta_x: F[x] &\rightarrow F[x] \\ f(x) &\mapsto f(x+1) - f(x). \end{aligned}$$

验证 Δ_x 是线性映射, 且 Δ_x 不是单射.

3. 设 V 是 F 上的线性空间, $V_1, \dots, V_k$ 是 V 的子空间且

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k.$$

令 $\pi_1: V \rightarrow V$ 把任意 $\mathbf{x} \in V$ 映到它在 V_1 上的投影. 证明: π_1 是线性映射, $\pi_1^2 = \pi_1$ 且

$$\ker(\pi_1) = V_2 + \dots + V_k.$$

4. 设 V 是实数域上 n 阶斜对称矩阵的集合.

- (i) 验证: V 是 $M_n(\mathbb{R})$ 的子空间.
- (ii) 求 V 的一组基并计算 $\dim(V)$.

5. 设 $V = \mathbb{Q}^2$, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 是 V 的标准基. 令

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (i) 验证: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 是 V 的一组基.
- (ii) 求从 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 到 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 的转换矩阵.
- (iii) 求从 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 到 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 的转换矩阵.
- (iv) 设 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. 求 $\mathbf{x}$ 在 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 下的坐标.

6. 设 V 是 F 上 n 维线性空间, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 和 $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ 是 V 的两组基, $A \in \text{GL}_n(F)$ 是从 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 到 $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ 的转换矩阵. 令

$$U = \{\mathbf{u} \in V \mid \mathbf{u} \text{ 在 } \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \text{ 和 } \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n \text{ 下的坐标相同}\}.$$

- (i) 验证 U 是 V 的子空间.
- (ii) 证明: $\dim(U) = n - \text{rank}(E - A)$, 其中 E 是 $\text{GL}_n(F)$ 中的单位矩阵.