第四次作业

1. 设 $\mathbb{Z}_3$ 的标准基是 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$,

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2 \quad \text{和} \quad \mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

   (i) 验证: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 是 $\mathbb{Z}_3^3$ 的一组基.

   (ii) 设 $\mathbf{v} = (\bar{2}, \bar{2}, \bar{1})^t$. 计算 $\mathbf{v}$ 在 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 下的坐标.

   (iii) 证明: $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle$. 把 $\mathbf{v}$ 看作 $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle$ 中的元素. 求它在 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3$ 下的坐标.

2. 设 V 是域 F 上的 n 维线性空间, U 是 V 的子空间, $d = \dim(U) > 0$ 且 $0 < d < n$. 证明: 存在 $f_1, \ldots, f_{n-d} \in V^*$ 使得 $U = \ker(f_1) \cap \cdots \cap \ker(f_{n-d})$.

3. 设 $f, g \in V^*$. 定义

$$\begin{array}{rccc} \phi: & V \times V & \to & F \\ & (\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \mapsto & f(\mathbf{x})g(\mathbf{y}). \end{array}$$

   (i) 验证 ϕ 是 V 上的双线性型.

   (ii) 证明: $\operatorname{rank}(\phi) \leq 1$.

4. 设 $\mathbb{Q}^3$ 上的双线性型由

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2$$

   给出, 其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^t$ 和 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^t$.

   (i) 计算 f 在标准基 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 下的矩阵并求 $\operatorname{rank}(f)$.

   (ii) 说明 f 是对称双线性型.

5. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. 计算 $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 和对角矩阵 D 使得 $P^tAP = D$.

6. 设 $n > 1$ 且域 F^n 上的两个子空间是

$$U_1 = \{(x_1, \ldots, x_n)^t \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\} \quad \text{和} \quad U_2 = \{(x_1, \ldots, x_n)^t \mid x_1 = \cdots = x_n\}.$$

   (i) 计算 $\dim(U_1)$ 和 $\dim(U_2)$.

   (ii) 证明: 当 F 的特征不等于 n 时, $U_1 + U_2$ 是直和.