第五次作业

1. 设 $A = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{0} \end{pmatrix} \in \mathrm{SM}_3(\mathbb{Z}_5)$. 计算 $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}_5)$ 和对角矩阵 D 使得 $D = P^t A P$.

2. 设 F 是特征不等于 2 的域, F^3 上的二次型 $q = x_3^2 - 2x_1x_2 + 5x_1x_3$. 计算 q 在 F^3 的标准基下的矩阵和 $\mathrm{rank}(q)$.

3. 设 F 是特征不等于 2 的域, V 是 F 上有限维 n 维线性空间, $f, g \in V^* \setminus \{\mathbf{0}^*\}$. 令

$$\begin{array}{rccc} q: & V & \to & F \\ & \mathbf{x} & \mapsto & f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}). \end{array}$$

   (i) 验证: q 是 V 上的二次型.

   (ii) 证明: $\mathrm{rank}(q) = \dim\langle f, g\rangle$.

   本题来自 `http://www.mmrc.iss.ac.cn/~zmli/LinearAlgebra-2020-2021/Exercise/midterm-spring.pdf` 第七题

4. 设 $q(x_1, x_2, x_3) = x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 为 $\mathbb{R}^3$ 上的实二次型.

   (i) 计算对称矩阵 A 使得 $q(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) A \left(x_1, x_2, x_3\right)^t$.

   (ii) 求可逆矩阵 P 使得 $P^t A P$ 是对角矩阵并计算 $P^t A P$.

5. 设 V 是 $\mathbb{R}$ 上的 n 维线性空间, q 是 V 上的二次型. 证明: V 中存在三个子空间 V_1, V_2, V_3 满足:

   (i) 对任意 $\mathbf{x} \in V_1 \setminus \{\mathbf{0}\}$, $q(\mathbf{x}) > 0$, 对任意 $\mathbf{x} \in V_2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, $q(\mathbf{x}) < 0$, 对任意 $\mathbf{x} \in V_3$, $q(\mathbf{x}) = 0$;

   (ii) $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$.