

第六次作业

1. (分块矩阵的相伴消元公式)

设 $A = \begin{pmatrix} B & C \\ C^t & M \end{pmatrix} \in \text{SM}_n(F)$, 其中 $B \in \text{GL}_k(F)$ 且 $1 \leq k < n$. 验证:

$$P^t A P = \begin{pmatrix} B & O \\ O & M - C^t B^{-1} C \end{pmatrix} \in \text{SM}_n(F),$$

其中

$$P = \begin{pmatrix} E_k & -B^{-1}C \\ O & E_{n-k} \end{pmatrix}.$$

2. 设 $q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是 \mathbb{R}^3 上的二次型. 计算 q 的签名.

3. 设 $A \in \text{SM}_n(\mathbb{R})$ 半正定. 证明对于任意正整数 m , A^m 也半正定.

4. 设 $A \in \text{SM}_n(\mathbb{R})$ 且 $\det(A) < 0$. 证明: 存在 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\mathbf{x}^t A \mathbf{x} < 0$.

5. 设 V 是 \mathbb{R} 上的 n 维线性空间, $f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_t \in V^*$. 令 $q = f_1^2 + \dots + f_s^2 - g_1^2 - \dots - g_t^2$.

(i) 验证 q 是 V 上的二次型.

(ii) 证明: q 的正惯性指数不大于 s , 负惯性指数不大于 t .