第七次作业

1. 设 $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. 计算 M 的所有顺序主子式, 并说明 M 不是半正定的.

2. 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$, Δ_i 是 A 的 i 阶顺序主子式, $i = 1, \ldots, n$. 证明 A 负定当且仅当 $(-1)^i \Delta_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$.

3. 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. 证明: 如果 A 半正定, 则 A 的主子式都非负.

4. 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 且 $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 证明: 如果 A 半正定, 则 $B^t AB$ 半正定且它的正惯性指数小于或等于 A 的正惯性指数.

5. 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. 证明: 存在 $r \in \mathbb{R}$ 使得 $rE + A$ 是正定矩阵.

6. 设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是线性空间 V 的一组基, $V_1 = \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k \rangle$ 和 $V_2 = \langle \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$. 证明:

$$V = V_1 \oplus V_2.$$