第八次作业

1. 设 $V = F[x]_{<3}$ 和 $W = F[x]_{<4}$, 其中 F 是域. 定义:

$$\begin{array}{rccc} \phi: & V & \to & W \\ & f & \mapsto & xf. \end{array}$$

   (i) 验证 $\phi : V \to W$ 是线性映射.

   (ii) 计算 $\operatorname{rank}(\phi)$.

   (iii) 确定 $\ker(\phi)$ 和 $\operatorname{im}(\phi)$.

2. 设 $V = \mathbb{R}[x]_{<4}$. 定义:

$$\begin{array}{rccc} \Delta: & V & \to & V \\ & f(x) & \mapsto & f(x+1) - f(x). \end{array}$$

   (i) 验证 Δ 是 V 上的线性映射.

   (ii) 求 Δ 在基底 $1, x, x^2, x^3$ 下的矩阵.

   (iii) 计算 $\operatorname{rank}(\Delta)$.

   (iv) 确定 $\ker(\Delta)$ 和 $\operatorname{im}(\Delta)$.

3. 设 F 是域, $A, B \in \mathrm{M}_n(F)$. 证明: 当 A 或 B 可逆时, $AB \sim_s BA$. 举例说明, 当 A, B 都不可逆时, AB 有可能与 BA 不相似.

4. 设 Δ 如第二题定义.

   (i) 说明: $\ker(\Delta) + \operatorname{im}(\Delta)$ 不是直和.

   (ii) 计算: Δ 的极小多项式.

5. (选做) 设 $\mathcal{A}$ 是域 F 上线性空间 V 上的线性算子, $\mu_{\mathcal{A}} \in F[t]$ 是 $\mathcal{A}$ 的极小多项式. 证明:

$$V = \ker(\mathcal{A}) \oplus \operatorname{im}(\mathcal{A}) \iff t^2 \nmid \mu_{\mathcal{A}}.$$