第九次作业

1. 设 F 是域, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 计算

$$A = J_2, \quad B = \begin{pmatrix} J_2 & O \\ O & O \end{pmatrix}_{4\times 4}, \quad C = \begin{pmatrix} J_2 & O \\ O & E_2 \end{pmatrix}_{4\times 4}, \quad D = \begin{pmatrix} J_2 & O \\ O & J_2 \end{pmatrix}_{4\times 4}$$

   的极小多项式.

2. 设 V 是域 F 的有限维线性空间, $\mathcal{A}$ 是 V 上的线性算子, V_1 和 V_2 是 V 中的 $\mathcal{A}$-子空间. 证明: $V_1 \cap V_2$ 和 $V_1 + V_2$ 都是 $\mathcal{A}$-子空间.

3. 设 V 是域 F 的有限维线性空间, $\mathcal{A}$ 是 V 上的线性算子, U 是 V 中的 $\mathcal{A}$-子空间. 证明: 对任意 $f(t) \in F[t]$, U 是 $f(\mathcal{A})$-子空间.

4. 设 $A \in \mathrm{M}_n(F)$. 证明: 对任意 $f(t) \in F[t]$, $f(A) = O$ 当且仅当 $\mathrm{rem}(f(t), \mu_A(t), t) = 0$.

5. 设 V 是域 F 的有限维线性空间, $\mathcal{A}$ 是 V 上的线性算子, $\mu_{\mathcal{A}}(t)$ 是 $\mathcal{A}$ 的极小多项式. 设 $\mu_{\mathcal{A}} = pq$, 其中 $p, g \in F[t]$ 且 $\gcd(p, q) = 1$. 设

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{B}: & \ker(q(\mathcal{A})) & \to & V \\ & \mathbf{x} & \mapsto & p(\mathcal{A})(\mathbf{x}). \end{array}$$

   证明:

   (i) $\mathcal{B}$ 是 $\ker(q(\mathcal{A}))$ 上的线性算子,

   (ii) (选做) $\mathcal{B}$ 可逆.