

中国科学院大学

试题专用纸

课程编号: B01GB001H-B01

课程名称: 线性代数I-B (期末A卷)

任课教师: 李子明、李宸、吴陆禹

注意事项:

1. 考试时间为180分钟, 考试方式闭卷;
2. 全部答案写在答题纸上;
3. 考试结束后, 请将本试卷和答题纸、草稿纸一并交回。

1. (10分) 设有限域 $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$. 计算线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + \bar{2}x_2 + x_3 + \bar{2}x_4 = \bar{0} \\ x_1 + x_3 = \bar{0} \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \bar{0} \end{cases}$$
 在 $\mathbb{Z}_3^4$ 中的解空间的维数和非平凡解的个数.

解. 齐次线性方程组的系数矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}.$$

由初等行变换得

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}.$$

故 $\text{rank}(A) = 2$. 根据对偶定理 $\dim(V_A) = 2$. 于是, V_A 中共有 9 个元素. 方程组有 8 个非平凡解.

2. (10分) 设 $A_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$. 计算 $\det(A_n)$.

解. 直接计算得 $\det(A_1) = 0$, $\det(A_2) = 1$. 设 $n > 2$. 按第一行展开得 $\det(A_n) = \det(A_{n-2})$. 于是, $\det(A_{2k-1}) = 0$ 和 $\det(A_{2k}) = 1$, $k = 1, 2, \dots$

3. (10分) 设 $(G, \cdot, e)$ 是群, T_G 是从 G 到 G 的所有双射关于映射复合 $\circ$ 构成的群. 证明: 存在从 G 到 T_G 的单同态.

证. 设

$$\begin{aligned}\phi: G &\rightarrow T_G \\ g &\mapsto L_g.\end{aligned}$$

其中 L_g 是 G 上关于 g 的左平移, 即对任意 $x \in G$, $L_g(x) = gx$. 它的逆映射是 $L_{g^{-1}}$. 于是, $L_g \in T_G$, 映射 ϕ 是良定义的.

设 $g, h \in G$. 根据 ϕ 的定义, 我们有 $\phi(gh) = L_{gh}$. 对于任意 $x \in G$, $L_{gh}(x) = ghx$. 而 $L_g \circ L_h(x) = L_g(hx) = ghx$. 故 $L_{gh} = L_g \circ L_h$, 即 $\phi(gh) = \phi(g) \circ \phi(h)$. 于是, ϕ 是同态.

设 $\phi(g) = \phi(h)$. 则 $L_g = L_h$. 特别地, $L_g(e) = L_h(e)$, 即 $ge = he$. 我们得到 $g = h$. 于是, ϕ 是单射. $\square$

4. (10分) 设 F 是域, $C \in M_n(F)$ 可逆. 令

$$\begin{aligned}\phi_C: M_n(F) &\rightarrow M_n(F) \\ A &\mapsto C^{-1}AC.\end{aligned}$$

(i) 验证 ϕ_C 是矩阵环 $M_n(F)$ 到其自身的环同构.

(ii) 证明: 对任意 $A \in M_n(F)$,

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(\phi_C(A)) \quad \text{和} \quad \det(A) = \det(\phi_C(A)).$$

证. (i) 设 $A, B \in M_n(F)$. 则

$$\phi_C(A + B) = C^{-1}(A + B)C = C^{-1}AC + C^{-1}BC = \phi_C(A) + \phi_C(B)$$

和

$$\phi_C(AB) = C^{-1}(AB)C = C^{-1}ACC^{-1}BC = \phi_C(A)\phi_C(B).$$

此外 $\phi_C(E) = C^{-1}EC = E$. 故 ϕ_C 是环同态.

设 $\phi_C(A) = \phi_C(B)$. 则 $C^{-1}AC = C^{-1}BC$. 故 $A = B$. 故 ϕ_C 是单射. 而

$$\phi_C(CAC^{-1}) = C^{-1}CAC^{-1}C = A.$$

于是, C 是满射. 由此得出, ϕ_C 是同构.

(ii) 因为 C 满秩, 所以 $\text{rank}(A) = \text{rank}(\phi_C(A))$. 根据行列式乘积定理

$$\det(\phi_C(A)) = \det(C^{-1})\det(A)\det(C).$$

又因为 $\det(C^{-1}) = \det(C)^{-1}$. 我们得到 $\det(\phi_C(A)) = \det(A)$.

5. (10分) 设 $f(x) = x^3 + \bar{2}x^2$ 和 $g(x) = x^2 - \bar{3}$ 在 $\mathbb{Z}_5[x]$ 中. 令 $r(x) = \text{rem}(f(x), g(x), x)$. 再设

$$A = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_5).$$

- (i) 计算 $r(x)$.
(ii) 判断 $r(A)$ 是否可逆. 如果它可逆, 计算 $r(A)^{-1}$.

解. (i) 直接计算得 $r(x) = \bar{3}x + \bar{1}$.

(ii) $r(A) = \bar{3}A + E = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{3} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$. 利用初等行变换计算得

$$r(A)^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{3} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{3} \end{pmatrix}.$$

6. (10分) 设 $(G, \cdot, e)$ 是群, $C_G = \{c \in G \mid \forall g \in G, gc = cg\}$.

- (i) 证明: C_G 是 G 的子群.
(ii) 举例说明存在群 G 使得 $C_G \neq G$ 且 $C_G \neq \{e\}$.

证. (i) 设 $a, b \in C_G$ 和 g 是 G 中任意元素. 因为 $bg = gb$, 所以 $b^{-1}g = gb^{-1}$. 于是,

$$(ab^{-1})g = a(b^{-1}g) = a(gb^{-1}) = (ag)b^{-1} = (ga)b^{-1} = g(ab^{-1}).$$

故 $ab^{-1} \in C_G$. 由子群判别法可知, C_G 是 G 的子群.

(ii) 令 $G := \text{GL}_2(\mathbb{R})$ 中, $2E$ 在 C_G 中. 而 $\text{diag}(1, -1)$ 不在 C_G 中. 这是因为

$$\text{diag}(1, -1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{但} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{diag}(1, -1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. (10分) 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 在对角线上的元素都等于 $1 + \alpha$, 非对角线上的元素都等于 1.

- (i) 计算 $\det(A)$ 并确定 α 取何值时 A 不可逆.
(ii) 证明存在次数为 2 的实系数多项式 $f(x)$ 满足 $f(A) = O$.

解. (i) 由题意可知,

$$A = \begin{pmatrix} 1+\alpha & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+\alpha & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\alpha & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+\alpha \end{pmatrix}.$$

则

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} n+\alpha & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ n+\alpha & 1+\alpha & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ n+\alpha & 1 & 1+\alpha & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n+\alpha & 1 & 1 & \cdots & 1+\alpha & 1 \\ n+\alpha & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+\alpha \end{pmatrix}.$$

于是,

$$\begin{aligned} \det(A) &= (n+\alpha) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+\alpha & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\alpha & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+\alpha \end{pmatrix} \\ &= (n+\alpha) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix} \\ &= (n+\alpha)\alpha^{n-1}. \end{aligned}$$

当 $n = 1$ 时, A 不可逆当且仅当 $\alpha = -1$. 当 $n > 1$ 时, A 不可逆当且仅当 $\alpha = -n$ 且 $\alpha \neq 0$.

(ii) 注意到 $A = \alpha E + S$, 其中 $S \in M_n(\mathbb{R})$, S 的每个元素都等于 1. 因为 $S^2 = nS$, 所以

$$A^2 = \alpha^2 E + 2\alpha S + S^2 = \alpha^2 E + (2\alpha + n)S.$$

故

$$A^2 = \alpha^2 E + (2\alpha + n)(A - \alpha E) = (2\alpha + n)A - (\alpha + n)\alpha E.$$

于是, 所求多项式是 $f(x) = x^2 - (2\alpha + n)x + (\alpha + n)\alpha$.

8. (10分) 设 F 是域, $A, B \in M_n(F)$ 且 $AB = O$. 证明:

(i) $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq n$;

(ii) $\text{rank}(E - A) + \text{rank}(E - B) \geq n$, 其中 E 是 n 阶单位阵.

证明. (i) 根据 Sylvester 秩不等式 $0 = \text{rank}(AB) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n$. 故 $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq n$.

(ii) 设 $M = \begin{pmatrix} E - A & O \\ O & E - B \end{pmatrix}$. 则 $\text{rank}(M) = \text{rank}(E - A) + \text{rank}(E - B)$, 且

$$\begin{aligned} M &\rightarrow \begin{pmatrix} E - A & O \\ E - A & E - B \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} E - A & B - AB \\ E - A & E - AB \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E - A & B \\ E - A & E \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} E - A - B + BA & O \\ E - A & E \end{pmatrix} =: N, \end{aligned}$$

其中第一次变换是左乘 $\begin{pmatrix} E & O \\ E & E \end{pmatrix}$, 第二次是右乘 $\begin{pmatrix} E & B \\ O & E \end{pmatrix}$, 第三次是利用 $AB = O$, 第四次是左乘 $\begin{pmatrix} E & -B \\ O & E \end{pmatrix}$. 故 $\text{rank}(M) = \text{rank}(N)$.

因为 $\text{rank}(N) \geq n$, 所以 $\text{rank}(E - A) + \text{rank}(E - B) \geq n$.

另证. 设 V_{E-A} 和 V_{E-B} 分别是以 $E-A$ 和 $E-B$ 为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间. 根据对偶定理(方程版), 只需证明 $\dim(V_{E-A}) + \dim(V_{E-B}) \leq n$.

设 $\mathbf{x} \in V_{E-A} \cap V_{E-B}$. 则 $\mathbf{x} - A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 和 $\mathbf{x} - B\mathbf{x} = \mathbf{0}$. 故

$$\mathbf{x} = A(B\mathbf{x}) = (AB)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

于是, $V_{E-A} \cap V_{E-B} = \{\mathbf{0}\}$. 由此和维数公式可知,

$$\dim(V_{E-A}) + \dim(V_{E-B}) = \dim(V_{E-A} + V_{E-B}) \leq \dim(\mathbb{R}^n) = n.$$

又另证. 设因为 $E = A + E - A$, 所以 $\text{rank}(A + E - A) = \text{rank}(E) = n$. 根据矩阵加法的秩不等式,

$$\text{rank}(E - A) + \text{rank}(A) \geq n.$$

同理 $\text{rank}(E - B) + \text{rank}(B) \geq n$. 故

$$\text{rank}(E - A) + \text{rank}(E - B) \geq 2n - \text{rank}(A) - \text{rank}(B).$$

由本题第一问可知, $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq n$. 于是

$$\text{rank}(E - A) + \text{rank}(E - B) \geq 2n - n = n.$$

9. (10分) 设 F 是域, $A \in M_n(F)$ 且 $A \neq O$, $f \in F[x] \setminus \{0\}$ 且 $f(A) = O$. 证明:

- (i) 如果 $\text{rem}(f(x), x, x) \neq 0$, 则 $\text{rank}(A) = n$;
- (ii) 如果 $\text{rem}(f(x), x^2, x) \neq 0$, 则 $V_A \cap V_c(A) = \{\mathbf{0}\}$, 其中 V_A 是以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间, $V_c(A)$ 是 A 的列空间.

证明: 设 $f = f_d x^d + \cdots + f_1 x + f_0$, 其中 $f_i \in F$ 且 $f_d \neq 0$.

(i) 因为 $\text{rem}(f(x), x, x) \neq 0$, 所以 $f_0 \neq 0$. 因为 $f(A) = O$, 所以

$$f(A) = f_d A^d + \cdots + f_1 A + f_0 E = O.$$

即

$$A(f_d A^{d-1} + \cdots + f_2 A + f_1 E) = -f_0 E.$$

因为 $\text{rank}(-f_0 E) = n$ 且 $\text{rank}(A) \geq \text{rank}(-f_0 E)$, 所以 $\text{rank}(A) = n$.

(ii) 如果 $f_0 \neq 0$, 则 (i) 蕴含 A 满秩. 故 $V_A = \{\mathbf{0}\}$. 从而, $V_A \cap V_c(A) = \{\mathbf{0}\}$.

设 $f_0 = 0$. 则 $\text{rem}(f(x), x^2, x) \neq 0$ 蕴含 $f_1 \neq 0$. 即

$$f(x) = f_d x^d + \cdots + f_2 x^2 + f_1 x \quad \text{和} \quad f_1 \neq 0.$$

设 $\mathbf{x} \in V_A \cap V_c(A)$. 因为 $\mathbf{x} \in V_c(A)$, 所以存在 $\mathbf{y} \in F^n$ 使得 $\mathbf{x} = A\mathbf{y}$. 因为 $\mathbf{x} \in V_A$, 所以 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. 故 $A^2\mathbf{y} = \mathbf{0}$. 于是

$$\mathbf{0} = A\mathbf{x} = f(A)\mathbf{y} = f_d A^d \mathbf{y} + \cdots + f_2 A^2 \mathbf{y} + f_1 A \mathbf{y} = f_1 A \mathbf{y}.$$

因为 $f_1 \neq 0$, 所以 $A\mathbf{y} = \mathbf{0}$. 故 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. 由此可知, $V_A \cap V_c(A) = \{\mathbf{0}\}$.

10. (10分) 设 F 是域, $n > 1$, $A \in M_n(F)$ 且 $r = \text{rank}(A) > 0$. 证明:

- (i) A 可以写成 r 个秩等于 1 的矩阵之和;
- (ii) A 可以写成不多于 $2r$ 个可逆矩阵之和.

证明. (i) 根据打洞引理, 存在 $P, Q \in \text{GL}_n(F)$ 使得

$$A = P \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q.$$

故 A 可以写成 r 个秩等于 1 的矩阵之和.

$$A = P \text{diag}(1, 0, \dots, 0) Q + P \text{diag}(0, 1, 0, \dots, 0) Q + \cdots + P \text{diag}(0, 0, \dots, 0, 1) Q.$$

故 A 可以写成 r 个秩等于 1 的矩阵之和.

(ii) 由 (i) 可知, 只需证明秩等于 1 的矩阵可以写成两个可逆矩阵之和.

设 $E_{1,n} \in M_n(F)$, 它在第一行第 n 列的元素等于 1, 其它处的元素都等于 0. 因为 $n > 1$, 所以 $M := E + E_{1,n}$ 可逆. 我们有 $E_{1,n} = M - E$. 设 $\text{rank}(A) = 1$. 则存在 $P, Q \in \text{GL}_n(F)$ 使得 $A = P E_{1,n} Q$. 由此可知

$$A = P(M - E)Q = PMQ - PQ,$$

其中 PMQ 和 $-PQ$ 都可逆.