中国科学院大学

试 题 专 用 纸

课程编号：B01GB003H-B01

课程名称：线性代数II-B (期末 A 卷)

任课教师：李子明、李宸、吴陆禹

注意事项：

1. 考试时间为180 分钟，考试方式闭卷；
2. 全部答案写在答题纸上；
3. 考试结束后，请将本试卷和答题纸、草稿纸一并交回。

1. (10分) 设实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间 $V=\mathbb{R}[x]_{<n}$, 其中 $n>1$.

$$\begin{array}{rccc}\mathcal{D}: & V & \to & V \\ & p(x) & \mapsto & \dfrac{dp}{dx}.\end{array}$$

计算 $\mathcal{D}$ 在基底 $\{1,x,\ldots,x^{n-1}\}$ 下的矩阵, 并说明 $\mathcal{D}$ 是否可对角化.

解. 因为

$$\mathcal{D}(1)=0,\quad \mathcal{D}(x)=1,\quad \mathcal{D}(x^2)=2x,\quad \ldots,\quad \mathcal{D}(x^{n-1})=(n-1)x^{n-2},$$

所以 $\mathcal{D}$ 在基底 $\{1,x,\ldots,x^{n-1}\}$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

显然 $\mathcal{D}^n=\mathcal{O}$ 且 $\mathcal{D}^{n-1}(x^{n-1})=(n-1)!\neq\mathcal{O}$. 故 $\mathcal{D}$ 是非零幂零算子, 它的唯一特征值是 0. 如果 $\mathcal{D}$ 可对角化, 则 $\mathcal{D}$ 必为零算子. 这与 $\mathcal{D}(x)=1$ 矛盾. 因此 $\mathcal{D}$ 不可对角化.

*(也可用 $\mu_{\mathcal{D}}=t^n$ 且 $n>1$ 得出 $\mathcal{D}$ 不可对角化).*

2. (10分) 设复数域上 4 阶矩阵 $A$ 的特征多项式是 $\chi_A=t^2(t-1)^2$.

(i) 如果 $A$ 的极小多项式等于 $\chi_A$, 计算 $A$ 的 Jordan 标准型.

(ii) 如果 $\mathrm{rank}(A)=2$ 且 $\mathrm{rank}(E-A)=3$, 计算 $A$ 的 Jordan 标准型.

解. *(i)* 因为 $\mu_A(t)=\chi_A(t)=t^2(t-1)^2$, 所以 0 和 1 对应的最大 *Jordan* 块的阶数都是 2. 又 0 和 1 的代数重数都是 2. 故

$$J_A=\begin{pmatrix} J_2(0) & O \\ O & J_2(1)\end{pmatrix}.$$

*(ii)* 因为 $\operatorname{rank}(A)=2$, 所以 $\dim\ker(A)=4-\operatorname{rank}(A)=2$. 因此 0 的几何重数等于 2. 又 0 的代数重数等于 2, 所以关于 0 的 *Jordan* 块是两个一阶块.

因为 $\operatorname{rank}(E-A)=3$, 所以 $\dim\ker(E-A)=1$. 因此 1 的几何重数等于 1. 又 1 的代数重数等于 2, 所以关于 1 的 *Jordan* 块是一个二阶块.

综上所述

$$J_A=\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&1&1\\ 0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

3. (10分) 设 $\mathbb{R}^4$ 是标准欧氏空间, 子空间 $V$ 是下列齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1&1&0&0\\ 0&0&1&1\\ 1&1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

的解空间. 计算 $V$ 的正交补 $V^{\perp}$ 的维数和一组单位正交基.

解. 设系数矩阵的三个行向量分别为

$$r_1=(1,1,0,0),\quad r_2=(0,0,1,1),\quad r_3=(1,1,-1,-1).$$

注意到 $r_3=r_1-r_2$, 且 $r_1,r_2$ 线性无关. 因为 $V$ 是该齐次线性方程组的解空间, 所以 $V^{\perp}$ 是系数矩阵的行空间. 故

$$V^{\perp}=\langle r_1^t,r_2^t\rangle,\quad \dim V^{\perp}=2.$$

又 $r_1\perp r_2$, 所以 $V^{\perp}$ 的一组单位正交基是

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)^t,\quad \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1)^t.$$

4. (10分) 设实对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. 已知 $A$ 的特征多项式是

$$(t-3)(t+1)^3.$$

计算正交矩阵 $P$ 使得 $P^tAP$ 是对角矩阵.

解. 设 $\lambda_1 = 3$ 和 $\lambda_2 = -1$. 直接计算得

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

故可取

$$e_1 = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)^t.$$

由于 $A$ 是实对称矩阵, 不同特征值对应的特征子空间正交. 因此 $V_{-1} = V_3^{\perp}$. 取

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)^t, \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1)^t,$$

和

$$e_4 = \frac{1}{2}(1,-1,-1,1)^t.$$

容易验证 $e_1, e_2, e_3, e_4$ 是 $\mathbb{R}^4$ 的一组单位正交基, 且 $e_2, e_3, e_4 \in V_{-1}$. 令

$$P = (e_1, e_2, e_3, e_4) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

则 $P$ 是正交矩阵, 且

$$P^tAP = \mathrm{diag}(3,-1,-1,-1).$$

5. (10分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. 计算 $A^{2026}$.

解. 直接计算得

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3E.$$

于是

$$A^{2026} = (A^2)^{1013} = 3^{1013}E = \begin{pmatrix} 3^{1013} & 0 \\ 0 & 3^{1013} \end{pmatrix}.$$

6. (10分) 设 $V$ 是域 $F$ 上的 $n$ 维线性空间, $W \subset V$ 是子空间, $\mathcal{A}$ 是 $V$ 上线性算子满足: 对任意 $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} - \mathcal{A}(\mathbf{x}) \in W$.

(i) 证明: $\ker(\mathcal{A}) \subset W$.

(ii) 再设 $\ker(\mathcal{A}) = W$. 证明: $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$ 且 $\mathcal{A}$ 可对角化.

解. *(i)* 设 $\mathbf{x} \in \ker(\mathcal{A})$. 则 $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = 0$. 由题设可知

$$\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathcal{A}(\mathbf{x}) \in W.$$

故 $\ker(\mathcal{A}) \subset W$.

*(ii)* 再设 $\ker(\mathcal{A}) = W$. 对任意 $\mathbf{x} \in V$, 由题设可知 $\mathbf{x} - \mathcal{A}(\mathbf{x}) \in W = \ker(\mathcal{A})$. 因此

$$\mathcal{A}(\mathbf{x} - \mathcal{A}(\mathbf{x})) = 0.$$

即

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}^2(\mathbf{x}) = 0.$$

由 $\mathbf{x}$ 的任意性得 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$. 于是 $\mathcal{A}$ 的极小多项式整除 $t(t-1)$. 因为 $t(t-1)$ 没有重根, 所以 $\mathcal{A}$ 可对角化.

7. (10分) 设 $V$ 是域 $F$ 上的 $n$ 维线性空间, 其中 $n > 0$. 再设 $\mathcal{A}$ 是 $V$ 上的线性算子. 证明: $\mathcal{A}$ 是数乘算子当且仅当 $V$ 中的所有 $n-1$ 维子空间都是 $\mathcal{A}$-不变的.

解. 如果 $\mathcal{A}$ 是数乘算子, 即存在 $\lambda \in F$ 使得 $\mathcal{A} = \lambda\mathcal{E}$, 则任意子空间在 $\mathcal{A}$ 下都是不变的. 因而所有 $n-1$ 维子空间都是 $\mathcal{A}$-不变的.

反过来, 假设 $V$ 中所有 $n-1$ 维子空间都是 $\mathcal{A}$-不变的. 当 $n = 1$ 时, $V$ 上任意线性算子都是数乘算子. 下设 $n > 1$.

先证明任意非零向量 $\mathbf{x} \in V$ 都是 $\mathcal{A}$ 的特征向量. 若 $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \notin \langle \mathbf{x} \rangle$, 则 $\mathbf{x}$ 与 $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ 线性无关. 于是存在一个 $n-1$ 维子空间 $U$ 满足 $\mathbf{x} \in U$ 且 $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \notin U$. 这与 $U$ 是 $\mathcal{A}$-不变子空间矛盾. 故 $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \in \langle \mathbf{x} \rangle$.

因此对任意非零 $\mathbf{x} \in V$, 存在 $\lambda_{\mathbf{x}} \in F$ 使得 $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \lambda_{\mathbf{x}}\mathbf{x}$. 若 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 线性无关, 则

$$\mathcal{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}(\mathbf{x} + \mathbf{y})$$

且

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\mathcal{A}(\mathbf{x})+\mathcal{A}(\mathbf{y})=\lambda_{\mathbf{x}}\mathbf{x}+\lambda_{\mathbf{y}}\mathbf{y}.$$

比较 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 的系数得 $\lambda_{\mathbf{x}}=\lambda_{\mathbf{y}}=\lambda_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}$. 若 $\mathbf{x},\mathbf{y}$ 线性相关, 则也显然有 $\lambda_{\mathbf{x}}=\lambda_{\mathbf{y}}$. 故存在同一个 $\lambda\in F$ 使得对所有 $\mathbf{x}\in V$ 都有 $\mathcal{A}(\mathbf{x})=\lambda\mathbf{x}$. 于是 $\mathcal{A}=\lambda E$, 即 $\mathcal{A}$ 是数乘算子.

8. (10分) 设 $V$ 是 $n$ 维欧氏空间, $U$ 是 $V$ 的子空间且 $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_d$ 是 $U$ 的一组基, 其中 $0<d<n$.

(i) 证明: 如果 $\mathbf{x}\in V$ 满足 $\mathbf{x}\perp\mathbf{u}_i$, $i=1,\ldots,d$, 则 $\mathbf{x}\perp U$.

(ii) 再设 $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_d$ 是 $U$ 的一组单位正交基. 设

$$\begin{aligned}\mathcal{A}:\ V &\to V\\ \mathbf{x} &\mapsto (\mathbf{x}|\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1+\cdots+(\mathbf{x}|\mathbf{u}_d)\mathbf{u}_d.\end{aligned}$$

验证 $\mathcal{A}$ 是 $V$ 上的线性算子, 并计算 $\mathcal{A}$ 的所有特征向量和对应的特征值.

解. *(i)* 设 $\mathbf{u}\in U$. 因为 $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_d$ 是 $U$ 的一组基, 所以存在 $a_1,\ldots,a_d\in\mathbb{R}$ 使得

$$\mathbf{u}=a_1\mathbf{u}_1+\cdots+a_d\mathbf{u}_d.$$

于是

$$(\mathbf{x}|\mathbf{u})=a_1(\mathbf{x}|\mathbf{u}_1)+\cdots+a_d(\mathbf{x}|\mathbf{u}_d)=0.$$

故 $\mathbf{x}\perp U$.

*(ii)* 设 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$, $a,b\in\mathbb{R}$. 则

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(a\mathbf{x}+b\mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^{d}(a\mathbf{x}+b\mathbf{y}|\mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i\\ &= a\sum_{i=1}^{d}(\mathbf{x}|\mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i+b\sum_{i=1}^{d}(\mathbf{y}|\mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i\\ &= a\mathcal{A}(\mathbf{x})+b\mathcal{A}(\mathbf{y}).\end{aligned}$$

故 $\mathcal{A}$ 是线性算子.

由 $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_d$ 是 $U$ 的单位正交基可知, $\mathcal{A}$ 是到 $U$ 上的正交投影. 若 $\mathbf{x}\in U$, 则

$$\mathcal{A}(\mathbf{x})=\mathbf{x},$$

所以 $U$ 中所有非零向量都是特征值 1 对应的特征向量. 若 $\mathbf{x} \in U^{\perp}$, 则

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = 0,$$

所以 $U^{\perp}$ 中所有非零向量都是特征值 0 对应的特征向量.

反之, 设 $\mathbf{x}$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征向量, $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$. 将 $\mathbf{x}$ 唯一地写成 $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, 其中 $\mathbf{u} \in U$, $\mathbf{w} \in U^{\perp}$. 则 $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}$. 因而

$$\mathbf{u} = \lambda(\mathbf{u} + \mathbf{w}).$$

若 $\lambda = 1$, 则 $\mathbf{w} = 0$, 从而 $\mathbf{x} \in U$. 若 $\lambda = 0$, 则 $\mathbf{u} = 0$, 从而 $\mathbf{x} \in U^{\perp}$. 若 $\lambda \neq 0, 1$, 则由 $U \cap U^{\perp} = \{0\}$ 可得 $\mathbf{u} = \mathbf{w} = 0$. 因此 $\mathcal{A}$ 的全部特征向量是 $U$ 和 $U^{\perp}$ 中的非零向量, 对应特征值分别是 1 和 0.

9. (10分) 设 $A$ 是 $n$ 阶实矩阵. 证明:

(i) 如果 $A$ 是正定的, 则 $A + A^{-1}$ 的特征值都大于或等于 2;

(ii) 如果 $A$ 是斜对称的, 则 $A^2$ 的特征值都小于或等于 0.

解. *(i)* 因为 $A$ 是正定矩阵, 所以 $A$ 是实对称矩阵, 且存在正交矩阵 $P$ 使得

$$P^t A P = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

其中 $\alpha_i > 0$. 两边取逆得:

$$P^t A^{-1} P = \mathrm{diag}(\alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_n^{-1}).$$

于是

$$P^t(A + A^{-1})P = \mathrm{diag}\left(\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_1}, \ldots, \alpha_n + \frac{1}{\alpha_n}\right).$$

因为对任意 $\alpha_i > 0$ 都有

$$\alpha_i + \frac{1}{\alpha_i} \geq 2,$$

所以 $A + A^{-1}$ 的特征值都大于或等于 2.

*(ii)* 因为 $A$ 是斜对称矩阵, 所以 $A^t = -A$. 从而 $A^2$ 是实对称矩阵. 对任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\mathbf{x}^t A^2 \mathbf{x} = (A^t\mathbf{x})^t A\mathbf{x} = (-A\mathbf{x})^t A\mathbf{x} = -(A\mathbf{x})^t(A\mathbf{x}) \leq 0.$$

故 $A^2$ 是半负定实对称矩阵. 因此 $A^2$ 的特征值都小于或等于 0.

*(也可通过斜对称矩阵在正交等价意义下得标准型证明).*

10. (10分) 设 $V$ 是域 $F$ 上的 $n$ 维线性空间, 其中 $n>0$, $\mathcal{A}$ 是 $V$ 上的线性算子.

(i) 设 $U$ 是 $V$ 中 $\mathcal{A}$-不变子空间, $\mathbf{u}\in U$. 证明: $\mathcal{A}$-循环子空间 $F[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{u}\subset U$.

(ii) 设 $V$ 是 $\mathcal{A}$-循环的. 请回答 $V$ 中的每个 $\mathcal{A}$-不变子空间是不是也是 $\mathcal{A}$-循环的? 并说明理由.

*(i) 证明:* 因为 $U$ 是 $\mathcal{A}$-不变的, 所以 $\mathcal{A}(\mathbf{u})\in U$. 故对任意 $k\in\mathbb{N}$, $\mathcal{A}^k(\mathbf{u})\in U$. 进而, 对任意 $f\in F[t]$, $f(\mathcal{A})(\mathbf{u})\in U$. 由此可知, $F[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{u}\subset U$.

*(ii)* 答: 当 $V$ 是 $\mathcal{A}$-循环空间时, $V$ 中的每个 $\mathcal{A}$-不变子空间也是 $\mathcal{A}$-循环的.

理由如下: 设 $V=F[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{v}$, $W$ 是 $V$ 中的 $\mathcal{A}$-子空间. 如果 $W=\{\mathbf{0}\}$, 则 $W=F[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{0}$, 是 $\mathcal{A}$-循环的. 否则, 存在 $\mathbf{w}\in W$ 使得 $\mathbf{w}\neq 0$. 因为 $V$ 是 $\mathcal{A}$-循环的, 所以存在非零多项式 $p\in F[t]$ 满足 $\mathbf{w}=p(\mathcal{A})(\mathbf{v})$, 且对于任意 $f\in F[t]$ 满足 $f(\mathcal{A})(\mathbf{v})\neq\mathbf{0}$ 和 $f(\mathcal{A})(\mathbf{v})\in W$, 都有 $\deg(f)\geq\deg(p)$.

设 $\mathbf{z}\in W$ 且 $\mathbf{z}\neq\mathbf{0}$. 令 $h\in F[t]$ 使得 $\mathbf{z}=h(\mathcal{A})(\mathbf{v})$. 由多项式除法可知:

$$h(t)=q(t)p(t)+r(t),$$

其中 $q,r\in F[t]$ 且 $\deg(r)<\deg(p)$. 我们有

$$h(\mathcal{A})=q(\mathcal{A})p(\mathcal{A})+r(\mathcal{A}) \implies h(\mathcal{A})(\mathbf{v})=q(\mathcal{A})p(\mathcal{A})(\mathbf{v})+r(\mathcal{A})(\mathbf{v}) \implies \mathbf{z}=q(\mathcal{A})(\mathbf{w})+r(\mathcal{A})(\mathbf{v}).$$

于是, $r(\mathcal{A})(\mathbf{v})\in W$ ($\because$ $\mathbf{z}\in W$ 且 $W$ 的 $\mathcal{A}$-不变性蕴含 $q(\mathcal{A})(\mathbf{w})\in W$). 再由 $\deg(p)$ 的极小性可知, $r(\mathcal{A})(\mathbf{v})=\mathbf{0}$. 故 $\mathbf{z}=q(\mathcal{A})(\mathbf{w})\in F[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{w}$.

再由 *(i)* 可知 $F[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{w}\subset W$. 我们得到 $W=F[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{w}$. 答案正确.