

第一章 预备知识

1 代数的起源

代数起源于解方程.

1.1 线性方程(组)

设 $\mathbb{R}$ 是实数集合, $a, b \in \mathbb{R}$. 计算 $x \in \mathbb{R}$ 使得

$$ax = b.$$

- (i) $a \neq 0$, 唯一解; 轨迹是实轴上一个点.
- (ii) $a = 0, b \neq 0$, 无解.
- (iii) $a = b = 0$, 不止一个解; 轨迹是整个实轴.

设 $a, b, c \in \mathbb{R}$. 求 $x, y \in \mathbb{R}$ 使得

$$ax + by = c.$$

- (i) a, b 不全为零, 不止一个解; 轨迹是实平面上的一条直线.
- (ii) $a = b = 0, c \neq 0$, 无解.
- (iii) $a = b = c = 0$, 不止一个解; 轨迹是整个实平面.

设 $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$. 求实数 $x, y \in \mathbb{R}$ 使得

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}.$$

- (i) 唯一解, 轨迹是实平面上两条不平行直线的交点.
- (ii) 无解.
- (iii) 不止一个解, 两条重合的直线或实平面.

设 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. 求实数 $x, y, z \in \mathbb{R}$ 使得

$$ax + by + cz = d.$$

说服自己当 a, b, c 不全为零时, 上述方程的解是三维实空间的一张平面.

一般的实系数线性方程组表述如下:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}. \quad (1)$$

它有 n 个未知数和 m 个方程.

下面我们引入矩阵来简洁地表示线性方程组. 实数上

的 m 行 n 列的矩阵($m \times n$ 的矩阵)是指

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

对 $i = 1, 2, \dots, m$, A 的第 i 行(向量)是 $(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n})$, 记为 $\vec{A}_i$. 对 $j = 1, 2, \dots, n$, A 的第 j 列(向量)是

$$\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix}.$$

记为 $\vec{A}^{(j)}$. (2) 中的矩阵可简记为 $(a_{i,j})_{m \times n}$.

注解 1.1 我们用 $O_{m \times n}$ 代表由 m 行和 n 列个 0 组成的矩阵, 称为 $m \times n$ 阶零矩阵.

例 1.2 设矩阵 A 由 (2) 给出. 则对 $i = 1, 2, \dots, m$, $\vec{A}_i$ 是 1 行 n 列的矩阵. 对 $j = 1, 2, \dots, n$, $\vec{A}^{(j)}$ 是 m 行 1 列的矩阵. 特别地, 每个实数都是一行一列的矩阵.

矩阵 (2) 称为方程组 (1) 的系数矩阵. 而矩阵

$$B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}.$$

称为 (1) 的增广矩阵. (1) 称为以 B 为增广矩阵的关于 $x_1, \dots, x_n$ 的线性方程组. 如果我们说 B 是一个线性方程组的增广矩阵, 则该方程组是指 (1).

设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ 使得

$$a_{i,1}\alpha_1 + \cdots + a_{i,n}\alpha_n = b_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

则称列向量

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

是 (1) 的一个解.

例 1.3 写出线性方程组:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 0 \\ y - z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

写出该方程对应的系数矩阵和增广矩阵.

解. 系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

增广矩阵是

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ A & & & 0 \\ & & & 1 \end{array} \right).$$

定义 1.4 如果 (1) 有解, 则称它是相容的 (*compatible*). 否则称之为不相容的. (*incompatible*). 设 (1) 相容. 如果它的解唯一, 则称之为确定的 (*deterministic*). 否则称之为不确定的 (*non-deterministic*).

例 1.5 设

$$\begin{array}{c} \downarrow \ell \\ M_{1 \times (n+1)} = \left(0 \cdots 0 \quad \bullet \quad * \quad \cdots \quad * \quad * \quad * \quad \cdots \quad * \quad * \quad * \quad \cdots \quad * \quad * \right) \end{array}$$

如果 $\ell \leq n$. 则以 M 为增广矩阵的方程是

$$\bullet x_\ell + * x_{\ell+1} + \cdots + * x_n = *.$$

它显然是相容的. 特别地, 方程确定当且仅当 $\ell = n = 1$.

如果矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & \bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $\bullet$ 代表非零实数, $*$ 代表任意实数, 则称 A 是阶梯型矩阵. 特别地, 仅由零组成的矩阵是阶梯型的.

因为方程 $0 = 0$ 对方程组解的性质没有影响. 我们只需考虑下列阶梯型矩阵

$$M = \begin{pmatrix} & \downarrow \ell_1 & & \downarrow \ell_2 & & \downarrow \ell_k \\ 0 \cdots 0 & \bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * & * \end{pmatrix} \quad (3)$$

是 $k \times (n+1)$ 阶梯型矩阵, 其中 $1 \leq \ell_1 < \cdots < \ell_k \leq n+1$.

例 1.6 设 M 由 (3) 给出. 则 $k \leq n+1$. 这是因为 k 个 $\bullet$ 在不同的列. 如果 $\ell_k = 1$, 则 $k = 1$. 否则第 1 行中的 $\bullet$

无法定义. 如果存在 $\ell_j = n + 1$ 则以 M 为增广矩阵线性方程组不相容. 这是因为方程组中第 j 个方程是 $0 = \bullet$

引理 1.7 (收缩-扩充, *contraction-extension*) 设以 (3) 中矩阵 M 为增广矩阵的线性方程组为 (E) , $k > 1$. 设 N 是去掉 M 中第一行和第 ℓ_1 列的矩阵, 且以 N 为增广矩阵的线性方程组是 (F) .

(i) 如果 $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{\ell_1-1} \\ \alpha_{\ell_1} \\ \alpha_{\ell_1+1} \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ 是 (E) 的解, 则 $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{\ell_1-1} \\ \alpha_{\ell_1+1} \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ 是 (F) 的解.

(ii) 如果 $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{\ell_1-1} \\ \alpha_{\ell_1+1} \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ 是 (F) 的解, 则存在唯一的实数

$$\lambda \text{ 使得 } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{\ell_1-1} \\ \lambda \\ \alpha_{\ell_1+1} \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ 是 } (E) \text{ 的解.}$$

证明. (i) 因为未知数在 x_{ℓ_1} 在 (E) 的第二个到第 k 个方程中不出现, 所以 $\mathbf{v}$ 是 (E) 的解蕴含 $\mathbf{w}$ 是 (F) 的解.

(ii) 因为 (F) 有解, 所以 $\ell_2 < n+1$ (见例 1.6). 故 $\ell_1 < n$. 把 $x_1 = \alpha_1, \dots, x_{\ell_1-1} = \alpha_{\ell_1-1}, x_{\ell_1+1} = \alpha_{\ell_1+1}, \dots, x_n = \alpha_n$ 代入 (E) 的第一个方程得 $\bullet x_{\ell_1} + * \alpha_{\ell_1+1} + \dots + * \alpha_n = *$. 该方程显然由唯一解, 记为 λ . 则 $\mathbf{u}$ 是 (E) 的解. $\square$

引理 1.8 (相容性) 利用上述引理的符号, 我们有 (E) 相容当且仅当 $\ell_k \leq n$.

证明. 设 (E) 相容. 则 $\ell_k \leq n$ (见例 1.6).

反之, 设 $\ell_k \leq n$. 对 n 用归纳法证明 (E) 相容. 当 $n = 1$ 时, $\ell_k = 1$. 故 $k = 1$ (见例 1.6). 从而 (E) 为 $\bullet x = *$, 相容.

设 $n > 1$ 且结论对 $n - 1$ 成立. 当 $k = 1$ 时结论成立 (见例 1.5). 设 $k > 1$ 且 N , (F) 与引理 1.7 中相同. 则 N 是 $(k - 1) \times n$ 的阶梯型矩阵, 且 M 中的第 ℓ_k 列是 N 中第

$\ell_k - 1$ 列. 因为 $\ell_k \leq n$, 所以 $\ell_k - 1 \leq n - 1$, 故归纳假设蕴含 (F) 有解. 根据引理 1.7 (ii), (E) 相容. $\square$

引理 1.9 (确定性) 利用上述引理中的术语和符号, 我们有 (E) 确定当且仅当 $k = n$, 即

$$M = \begin{pmatrix} \bullet & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & \bullet & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \bullet & * \end{pmatrix}.$$

证明. 设 (E) 确定. 我们对 n 归纳来证明 $k = n$. 设 $n = 1$. 根据引理 1.8, $\ell_k \leq 1$. 故 $\ell_k = 1$. 于是, $k = 1$ (见例 1.6).

设 $n > 1$ 且 $n - 1$ 时结论成立. 此时 $k > 1$. 设矩阵 N 和 (F) 与引理 1.7 中相同. 则引理 1.7 (i) 蕴含 (F) 相容. 进而, 引理 1.7 (ii) 蕴含 (F) 确定. 故 $k - 1 = n - 1$. 由此可知, $k = n$.

反之, 设 $k = n$. 则 $\ell_k = n$. 根据引理 1.8, (E) 相容. 我们通过对 n 归纳证明 (E) 确定. 当 $n = 1$ 时, $k = 1$. 故 (E) 确定 (见例 1.5). 设 $n > 1$ 且 $n - 1$ 时结论成立. 则 $k - 1 = n - 1$ 且矩阵 N 是阶梯型. 由归纳假设, (F) 确定. 根据引理 1.7 (ii), (E) 确定. $\square$

1.2 高次方程(组)

设 a, b, c 是实数且 $a \neq 0$. 求 x 使得

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

令

$$x = y - \frac{b}{2a}.$$

代入等价方程

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= \left(y - \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b}{a}\left(y - \frac{b}{2a}\right) + \frac{c}{a} \\ &= y^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ &\Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{aligned}$$

注解 1.10 当 $b^2 - 4ac < 0$ 时, 一元二次方程没有实数解.

设 a, b, c, d 是实数且 $a \neq 0$. 求 x 使得

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \quad (4)$$

令

$$x = y - \frac{b}{3a}.$$

将 y 代入等价于 (4) 的方程

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

得

$$\left(y - \frac{b}{3a}\right)^3 + \frac{b}{a}\left(y - \frac{b}{3a}\right)^2 + \frac{c}{a}\left(y - \frac{b}{3a}\right) + \frac{d}{a} = 0.$$

化简后, 我们有

$$y^3 + py + q = 0, \quad (5)$$

其中 p, q 是实数.

注解 1.11 设

$$f(x) = x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{a_n}x + \frac{a_0}{a_n}.$$

令

$$x = y - \frac{a_{n-1}}{na_n}$$

并代入 $f(x)$ 得到 n 次多项式 $g(y)$. 该多项式的次高项的系数等于零.

为了求解 (5), 令

$$y = z - \frac{p}{3z}. \quad (6)$$

代入 (5) 得

$$\left(z - \frac{p}{3z}\right)^3 + p\left(z - \frac{p}{3z}\right) + q = 0.$$

展开后, 我们有:

$$z^3 - pz + \frac{p^2}{3z} - \frac{p^3}{27z^3} + pz - \frac{p^2}{3z} + q = 0.$$

化简得

$$z^6 + qz^3 - \frac{p^3}{27} = 0. \quad (7)$$

通过这个方程求出 z^3 , 再通过开立方求得 y , 然后得到 x . 由此可知我们可以通过有理运算(加、减、乘、除), 开平方和开立方求出一元三次方程的根. 变换 (6) 是非平凡的, (7) 称为 (4) 的预解式 (resolvent).

一元四次方程可以通过有理运算、开平方、开立方和开四次方求解. 其核心技巧也是构造预解式. 但 Abel 和 Galois 证明了一元五次方程不可能通过有理运算和开方求解. 特别地, Galois 的证明催生了一门新的数学分支: 抽象代数.

求解多元高次代数方程组是代数几何的起源. 总之, 代数是可操作的几何, 几何是可描绘的代数.

2 线性方程组初步

设 (L) 和 (L') 是两个实系数 n 元线性方程组. 如果或者 (L) 和 (L') 都不相容, 或者 (L) 和 (L') 有相同的解, 则称它们是等价的. 本节的目的 是把一个线性方程组化为一个等价的线性方程组, 而后者的相容性和确定性是容易判断的.

2.1 矩阵的初等行变换

设 $A = (a_{i,j})_{m \times n}$ 是 $m \times n$ 的实矩阵, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

- (i) 把 A 中第 i 行和第 j 行互换位置得到矩阵 A' . 则称 A' 是通过第 I 类初等行变换由 A 得到的. 此时 A' 的第 i 行和第 j 行分别是

$$(a_{j,1}, \dots, a_{j,n}) \quad \text{和} \quad (a_{i,1}, \dots, a_{i,n}).$$

其它行与 A 相同.

- (ii) 设 $i \neq j, \alpha$ 是实数. 把 A 的第 i 行通乘 α 后加到第 j 行上得到矩阵 A' . 则称 A' 是通过第 II 类初等行变换由 A 得到的. 时 A' 的第 j 行是

$$(\alpha a_{i,1} + a_{j,1}, \dots, \alpha a_{i,n} + a_{j,n}).$$

其它行与 A 相同.

- (iii) 设 α 是非零实数. 把 A 的第 i 行通乘 α 得到矩阵 A' . 则称 A' 是通过第 III 类初等行变换由 A 得到的. 时 A' 的第 i 行是

$$(\alpha a_{i,1}, \dots, \alpha a_{i,n}).$$

其它行与 A 相同.

I、II、III 类初等行变换统称初等行变换.

引理 2.1 设 n 元线性方程组 (L) 的增广矩阵是 B , 对 B 进行一次初等行变换得到矩阵 B' . 再设 B' 对应的线性方程组是 (L') . 则两方程组等价.

证明. 当 B' 是通过第 I 类初等行变换由 B 得到的. 则 (L') 是把 L 中两个方程互换位置得到的方程组. 于是, (L) 和 (L') 显然等价. 当 B' 是通过第 III 类初等行变换由 B 得到的. 则 (L') 是把 L 中某个方程通乘一个非零实数得到的方程组. 于是, 两方程组等价.

下面我们考虑第二类初等变换. 设

$$B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}.$$

则 (L) 是

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{j,1}x_1 + a_{j,2}x_2 + \cdots + a_{j,n}x_n = b_j \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{array} \right. .$$

而 (L') 是

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i \\ \vdots \\ (\alpha a_{i,1} + a_{j,1})x_1 + (\alpha a_{i,2} + a_{j,2})x_2 + \cdots + (\alpha a_{i,n} + a_{j,n})x_n = \alpha b_i + b_j \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{array} \right. .$$

下面我们来证明 (L) 和 (L') 同解. 设

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \beta_1 \\ x_2 = \beta_2 \\ \vdots \\ x_n = \beta_n \end{array} \right. \quad (8)$$

是 L 的一个解. 代入 (L') 的第 j 个方程得

$$\sum_{k=1}^n (\alpha a_{i,k} + a_{j,k}) \beta_k = \alpha \sum_{k=1}^n a_{i,k} \beta_k + \sum_{k=1}^n a_{j,k} \beta_k = \alpha b_i + b_j.$$

注意到 (L) 和 (L') 只有第 j 个方程不同. 故 (8) 是 (L') 的解.

反之, 设 (8) 是 (L') 的解. 方程组 (L) 中只有第 j 个方

程与 (L') 中不一样, 把解代入该方程得:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n a_{j,k} \beta_k &= \sum_{k=1}^n (\alpha a_{i,k} + a_{j,k} - \alpha a_{i,k}) \beta_k \\
 &= \underbrace{\sum_{k=1}^n (\alpha a_{i,k} + a_{j,k}) \beta_k}_{L' \text{ 中第 } j \text{ 个方程}} - \alpha \underbrace{\sum_{k=1}^n a_{i,k} \beta_k}_{L' \text{ 中第 } i \text{ 个方程}} \\
 &\stackrel{\because j \neq i}{=} \alpha b_i + b_j - \alpha b_i = b_j.
 \end{aligned}$$

故 (8) 也是 (L) 的解. $\square$

命题 2.2 设 n 元线性方程组 (L) 的增广矩阵是 B , 对 B 进行有限次初等行变换得到矩阵 B' . 再设 B' 对应的线性方程组是 (L') . 则两方程组等价.

证明. 有限次利用引理 2.1 即得. $\square$

2.2 Gauss 消去法 (矩阵版)

命题 2.3 设 A 是 $m \times n$ 的实矩阵. 通过有限次第 I 类和第 II 类初等行变换, 我们可以把 A 化为一个阶梯型矩阵.

证明. 设 A 不是零矩阵. 我们对 m 归纳. 当 $m = 1$ 时, A 本身是阶梯型的. 故命题成立. 设 $m > 1$ 且命题对 $m - 1$ 成立. 设 ℓ 列是 A 中第一个含有非零数的列, 其中一个非零数等于 a 并出现在第 k 行. 我们把第一行和第 k 行对调

得到矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & a & * \cdots * \\ 0 \cdots 0 & b_2 & * \cdots * \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \cdots 0 & b_m & * \cdots * \end{pmatrix},$$

其中 $b_2, \dots, b_m$ 是实数. 把第一行通乘 $-b_2 a^{-1}$ 加到第二行上得

$$C = \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & a & * \cdots * \\ 0 \cdots 0 & 0 & * \cdots * \\ 0 \cdots 0 & b_3 & * \cdots * \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \cdots 0 & b_m & * \cdots * \end{pmatrix},$$

类似地, 我们把第一行通乘 $-b_i a^{-1}$ 加到第 i 行上, $i = 3, 4, \dots, m$ 得

$$D = \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & a & * \cdots * \\ 0 \cdots 0 & 0 & * \cdots * \\ 0 \cdots 0 & 0 & * \cdots * \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \cdots 0 & 0 & * \cdots * \end{pmatrix}.$$

设 D' 是由 D 中第二行、第三行、..., 第 m 行组成得矩阵. 则 D' 有 $m - 1$ 行.

根据归纳假设, 通过有限次第 I 类和第 II 类初等行变换, 我们可以把 D' 化为一个阶梯型矩阵 D'' , 其中前 ℓ 列中得元素都等于零. 而对 D' 做初等行变换相当于对 D 做初等行变换. 于是, 通过有限次第 I 类和第 II 类初等行变换, 我们把 D 化为阶梯矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & a & * \cdots * \\ & D'' \end{pmatrix}. \quad \square$$

例 2.4 利用初等行变换把矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

化为阶梯型.

解.

$$A \xrightarrow{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - \frac{8}{3}r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \square$$

2.3 相容性和确定性的判定

设 (L) 是一个 n 元线性方程组, 其系数矩阵为 A , 增广矩阵为 $B = (A|\mathbf{b})$. 由命题 2.3 我们可以对 B 做有限次初等行

变换把 A 化为阶梯型, 从而得到矩阵

$$D = (C|\mathbf{d}) \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & \bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & * \cdots * & d_1 \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * & * & * \cdots * & d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * \cdots * & d_k \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \cdots 0 & d_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \cdots 0 & d_m \end{pmatrix},$$

定理 2.5 利用上述记号. 我们有

(i) (L) 相容当且仅当 $d_{k+1} = \cdots = d_m = 0$;

(ii) (L) 确定当且仅当 $d_{k+1} = \cdots = d_m = 0$ 且 $k = n$.

证明. 设 (L') 是以 D 为增广矩阵的 n 元线性方程组. 由命题 2.2, (L') 与 (L) 等价. 于是, 我们只要对 (L') 讨论其相容性和确定性即可.

(i) 如果 $d_{k+1}, \dots, d_m$ 不全为零, 则 (L') 中含有矛盾方程, 故不相容. 设 $d_{k+1}, \dots, d_m$ 都等于零. 由引理 ?? 可知 (L') 相容.

(ii) 如果 $d_{k+1} = \cdots = d_m = 0$ 且 $k = n$. 由引理 ?? (ii) 可知, (L') 确定.

反之, 设 (L') 确定. 由 (i) 可知 $d_{k+1} = \cdots = d_m = 0$. 如果 $k < n$, 则引理 1.8 和 1.9 蕴含 (L') 不确定. 矛盾. $\square$

注解 2.6 当 $m < n$ 时, (E) 或者不相容或者不确定.

例 2.7 下面两个方程组 L_B 和 L_C 分别由增广矩阵 B 和 C 确定:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 10 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 6 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

判断 L_B 和 L_C 的相容性和确定性

解. 对 B 做初等行变换把 L_B 的系数矩阵化为阶梯型得

$$B \xrightarrow{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 10 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-\frac{8}{3}r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

根据定理 2.5, L_B 不相容.

通过对 C 做初等行变换把 L_C 的系数矩阵化为阶梯型得

$$C \xrightarrow{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 6 & 3 & 6 & 9 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-3r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

根据定理 2.5, L_C 相容但不确定. $\square$

2.4 齐次线性方程组

实系数线性方程组 (H)

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = 0 \end{cases}.$$

称为齐次线性方程组. 显然, H 由它的系数矩阵唯一确定且 $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ 是它的一个解. 称之为 H 的平凡解或零解. 故 H 必然相容.

由此我们得到一个重要的结论.

推论 2.8 设齐次线性方程组 (H) 中 $m < n$. 则该方程组有非平凡解.

证明. 根据注释 2.6, (H) 不确定. 故它有非平凡解. $\square$

注解 2.9 判断 (H) 是否确定只需对其系数矩阵施行 *Gauss* 消去法. 这是因为在进行矩阵初等行变换时, 增广矩阵的最后一列始终由零组成.