

第三章 行列式

1 多重线性斜对称函数

在本节中, 设 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准基.

1.1 $\mathbb{R}^n$ 上的多重线性函数

定义 1.1 映射:

$$\begin{aligned} f : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_m &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) &\mapsto f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) \end{aligned}$$

称为 m 重线性的, 如果对任意 $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ 和 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 我们有

$$\begin{aligned} &f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m) \\ &= \alpha f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m) \\ &+ \beta f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{v}, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m). \end{aligned}$$

例 1.2 一重线性函数就是 $\mathbb{R}^n$ 上的线性函数. 设

$$\alpha_1 = f(\mathbf{e}_1), \dots, \alpha_n = f(\mathbf{e}_n) \in \mathbb{R}.$$

则

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n)^t &\mapsto \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n. \end{aligned}$$

例 1.3 设

$$f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix},$$

其中

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

则 f 是 $\mathbb{R}^2$ 上的二重线性函数.

验证. 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

则

$$\begin{aligned} f(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}, \mathbf{y}) &= \det \begin{pmatrix} \alpha u_1 + \beta v_1 & y_1 \\ \alpha u_2 + \beta v_2 & y_2 \end{pmatrix} \\ &= (\alpha u_1 + \beta v_1)y_2 - (\alpha u_2 + \beta v_2)y_1 \\ &= \alpha(u_1y_2 - u_2y_1) + \beta(v_1y_2 - v_2y_1) \\ &= \alpha \det \begin{pmatrix} u_1 & y_1 \\ u_2 & y_2 \end{pmatrix} + \beta \det \begin{pmatrix} v_1 & y_1 \\ v_2 & y_2 \end{pmatrix} \\ &= \alpha f(\mathbf{u}, \mathbf{y}) + \beta f(\mathbf{v}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

类似地, 我们可验证 $f(\mathbf{x}, \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$.

故 f 是二重线性函数.

例 1.4 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的二重线性函数, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. 展开 $f(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y})$.

解. 利用多重线性计算:

$$\begin{aligned} & f(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) \\ &= \alpha f(\mathbf{u}, \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) + \beta f(\mathbf{v}, \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) \quad (\text{关于第一个变元线性}) \\ &= \alpha(\lambda f(\mathbf{u}, \mathbf{x}) + \mu f(\mathbf{u}, \mathbf{y})) + \beta(\lambda f(\mathbf{v}, \mathbf{x}) + \mu f(\mathbf{v}, \mathbf{y})) \\ & \quad (\text{关于第二个变元线性}) \\ &= \alpha\lambda f(\mathbf{u}, \mathbf{x}) + \alpha\mu f(\mathbf{u}, \mathbf{y}) + \beta\lambda f(\mathbf{v}, \mathbf{x}) + \beta\mu f(\mathbf{v}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

特别地

$$f(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{u}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{v}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{v}, \mathbf{y})$$

和

$$f(\alpha\mathbf{u}, \alpha\mathbf{x}) = \alpha^2 f(\mathbf{u}, \mathbf{x}).$$

引理 1.5 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上 m 重线性函数, $k \in \{1, \dots, m\}$. 则

$$f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{0}, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m) = 0.$$

证明. 我们计算

$$\begin{aligned} & f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{0}, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m) \\ &= f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{0} + \mathbf{0}, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m) \\ &= f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{0}, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m) + f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{0}, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m) \\ &\implies f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{0}, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

令

$$f(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_m}) = a_{i_1, i_2, \dots, i_m}, \quad (1)$$

其中 $i_1, i_2, \dots, i_m \in \{1, 2, \dots, n\}$. 我们利用这 n^m 个实数来计算一个 m 重线性函数的表达式. 再设

$$\mathbf{x}_j = \sum_{i_j=1}^n x_{i_j, j} \mathbf{e}_{i_j}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

则

$$\begin{aligned} & f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m) \\ &= f\left(\sum_{i_1=1}^n x_{i_1, 1} \mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m\right) \\ &= \sum_{i_1=1}^n x_{i_1, 1} f\left(\mathbf{e}_{i_1}, \sum_{i_2=1}^n x_{i_2, 2} \mathbf{e}_{i_2}, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_m\right) \\ &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n x_{i_1, 1} x_{i_2, 2} f(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_m) \\ &\quad \vdots \\ &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_m=1}^n x_{i_1, 1} x_{i_2, 2} \cdots x_{i_m, m} f(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_m}) \end{aligned}$$

故

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_m=1}^n a_{i_1, i_2, \dots, i_m} x_{i_1, 1} x_{i_2, 2} \cdots x_{i_m, m}. \quad (2)$$

1.2 $\mathbb{R}^n$ 上的多重斜对称线性函数

定义 1.6 映射:

$$\begin{aligned} f : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_m &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) &\mapsto f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) \end{aligned}$$

称为 m 重斜对称的, 如果对任意 $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$,

$$\begin{aligned} &f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_m) \\ &= -f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_m). \end{aligned}$$

例 1.3 中二阶行列式是 2 重斜对称的. 这是因为

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} y_1 & x_1 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}.$$

引理 1.7 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 m 重斜对称函数. 如果 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ 中有两个向量相等, 则 $f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) = 0$.

证明. 不妨设 $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 := \mathbf{u}$. 因为

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_m) = -f(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_m),$$

所以

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_m) &= -f(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_m) \\ \implies 2f(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_m) &= 0. \end{aligned}$$

因为 $2 \neq 0$, 所以 $f(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_m) = 0$. $\square$

设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上 n 重斜对称线性函数. 此时 $m = n$, 我们利用公式 (1) 和 (2) 推导 f 的表达式. 由引理 1.5 可知, 如果下标 $i_1, \dots, i_n$ 中有两个相同, 则

$$a_{i_1, \dots, i_n} = 0.$$

若 $i_1, \dots, i_n$ 两两不同, 则这些下标对应一个置换

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}.$$

即 $(i_1, \dots, i_n) = (\sigma(1), \dots, \sigma(n))$. 再根据上周公式 (7), 我们有

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)} x_{\sigma(1), 1} x_{\sigma(2), 2} \cdots x_{\sigma(n), n}. \quad (3)$$

设 $w = f(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$. 我们来研究 w 和 $a_{\sigma(1), \dots, \sigma(n)}$ 之间的关系. 根据上周讲义中公式 (6),

$$a_{\sigma(1), \dots, \sigma(n)} = f(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{e}_{\sigma(n)}).$$

下面我们证明:

断言. $a_{\sigma(1), \dots, \sigma(n)} = \epsilon_\sigma w$.

证明. 设 $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_k$, 其中 $\tau_1, \dots, \tau_k$ 是对换. 如果 $k = 1$, 则可设 $\sigma = (i, j)$. 于是,

$$\begin{aligned} a_{\sigma(1), \dots, \sigma(n)} &= f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_n) \\ &= -f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_n) \\ &= -w. \end{aligned}$$

断言在 $k = 1$ 时成立. 设 $k > 1$ 且断言对 $k-1$ 成立. 考虑 k 时. 令 $\pi = \tau_2 \cdots \tau_k$. 则 $\sigma = \tau_1 \pi$. 我们有

$$\begin{aligned} a_{\sigma(1), \dots, \sigma(n)} &= f(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{e}_{\sigma(n)}) \\ &= f(\mathbf{e}_{\tau_1 \pi(1)}, \dots, \mathbf{e}_{\tau_1 \pi(n)}) \\ &= -f(\mathbf{e}_{\pi(1)}, \dots, \mathbf{e}_{\pi(n)}) \\ &= -\epsilon_\pi f(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \quad (\text{归纳假设}) \\ &= \epsilon_\sigma w. \end{aligned}$$

断言成立.

由此断言和 (3) 可知

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = w \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_\sigma x_{1,\sigma(1)} x_{2,\sigma(2)} \cdots x_{n,\sigma(n)}. \quad (4)$$

于是, 每个 $\mathbb{R}^n$ 上的 n 重斜线性函数都具有形式 (4) 且具有上述形式的函数必然 n 重斜线性, 其中 w 可取任意实数.

2 行列式的定义和基本性质

定义 2.1 行列式函数:

$$\begin{aligned} \det : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ &\mapsto \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_{\sigma} x_{\sigma(1),1} \cdots x_{\sigma(n),n}, \end{aligned}$$

其中

$$\mathbf{x}_j = \begin{pmatrix} x_{1,j} \\ \vdots \\ x_{n,j} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

由 (4) 可知, $\det$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 n 重线性斜对称函数.

注解 2.2 根据 (3) 中 w 的定义, $\det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$.

定义 2.3 设 $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$. 矩阵 A 的行列式是

$$\det(\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(n)}). \quad (\text{函数版})$$

换言之,

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_{\sigma} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}. \quad (\text{系数版}) \quad (5)$$

矩阵 A 的行列式记为 $\det(A)$ 或 $|A|$.

事实上

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_{\sigma} a_{1,\sigma(1),1} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

也成立. 验证如下:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_{\sigma} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_{\sigma} a_{\sigma(1),\sigma^{-1}\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n),\sigma^{-1}\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_{\sigma^{-1}} a_{\sigma(1),\sigma^{-1}\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n),\sigma^{-1}\sigma(n)} \quad (\sigma^{-1} \text{ 和 } \sigma \text{ 奇偶性相同}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_{\sigma^{-1}} a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)} \quad (\{1, \dots, n\} = \{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\}) \\
&= \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \epsilon_{\sigma^{-1}} a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)} \quad \sigma^{-1} \text{ 遍历整个 } S_n \\
&= \sum_{\tau \in S_n} \epsilon_{\tau} a_{1,\tau(1)} \cdots a_{n,\tau(n)}.
\end{aligned}$$

验证完毕. 由此可知,

命题 2.4 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$. 则 $\det(A) = \det(A^t)$.

由函数版的定义可知, $\det(A)$ 是关于 A 的列的 n 重线性斜函数. 由此得出下列基本性质.

(L1) 如果 $\vec{A}^{(j)} = \alpha \mathbf{v}$, 其中 $\alpha \in \mathbb{R}$ 和 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

$$\det(A) = \alpha \det \left(\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(j-1)}, \mathbf{v}, \vec{A}^{(j+1)}, \dots, \vec{A}^{(n)} \right).$$

(L2) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

(L3) 设 $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ 且 $\vec{A}^{(j)} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$. 则

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(j-1)}, \mathbf{u}, \vec{A}^{(j+1)}, \dots, \vec{A}^{(n)}) \\ &\quad + \det(\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(j-1)}, \mathbf{v}, \vec{A}^{(j+1)}, \dots, \vec{A}^{(n)}). \end{aligned}$$

(L4) 设 $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ 且 $\vec{A}^{(j)} = \sum_{k=1}^m \alpha_k \mathbf{v}_k$, 其中 $\alpha_i \in \mathbb{R}$ 和 $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n$. 则

$$\det(A) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \det(\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(j-1)}, \mathbf{v}_k, \vec{A}^{(j+1)}, \dots, \vec{A}^{(n)}).$$

在上述性质中 (L1) 和 (L3) 成立是因为多重线性函数关于一个变元是线性的. 性质 (L4) 是 (L1) 和 (L3) 的推论(用归纳法直接可得). 性质 (L2) 可以通过 n 次利用 (L1) 得出. 具体过程如下

$$\begin{aligned} \det(\alpha A) &= \det(\alpha \vec{A}^{(1)}, \alpha \vec{A}^{(2)}, \dots, \alpha \vec{A}^{(n)}) \\ &= \alpha \det(\vec{A}^{(1)}, \alpha \vec{A}^{(2)}, \dots, \alpha \vec{A}^{(n)}) \quad (\text{对第一列用 (L1)}) \\ &= \alpha^2 \det(\vec{A}^{(1)}, \vec{A}^{(2)}, \alpha \vec{A}^{(3)}, \dots, \alpha \vec{A}^{(n)}) \quad (\text{对第二列用 (L1)}) \\ &\vdots \\ &= \alpha^n \det(\vec{A}^{(1)}, \vec{A}^{(2)}, \dots, \vec{A}^{(n)}) \\ &= \alpha^n \det(A). \end{aligned}$$

例 2.5 证明: $D_n = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 的行列式等于 $\lambda_1 \cdots \lambda_n$.

证明. 我们计算

$$\begin{aligned}\det(D_n) &= \det(\lambda_1 \mathbf{e}_1, \lambda_2 \mathbf{e}_2, \dots, \lambda_n \mathbf{e}_n) \\ &= \lambda_1 \det(\mathbf{e}_1, \lambda_2 \mathbf{e}_2, \dots, \lambda_n \mathbf{e}_n) \quad (\text{对第一列用 (L1)}) \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \lambda_3 \mathbf{e}_3, \dots, \lambda_n \mathbf{e}_n) \quad (\text{对第二列用 (L1)}) \\ &\vdots \\ &= \lambda_1 \cdots \lambda_n \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = \lambda_1 \cdots \lambda_n.\end{aligned}$$

例 2.6 设 $A \in M_{2n+1}(\mathbb{R})$ 斜对称. 证明: $\det(A) = 0$.

证明. 因为 $A^t = -A$, 所以 $\det(A) = \det(-A)$ (命题 2.4).
根据性质 (L2),

$$\det(-A) = (-1)^{2n+1} \det(A) = -\det(A).$$

于是, $\det(A) = -\det(A)$. 从而 $\det(A) = 0$.

利用行列式函数是斜对称的和性质 (L4), 我们得到:

(S1) 设交换方阵 A 中两不同列的位置得到方阵 B , 则

$$\det(B) = -\det(A).$$

(S2) 如果方阵 A 中有两列相同, 则 $\det(A) = 0$;

(S3) 如果 A 中某列是其它列的线性组合, 则 $\det(A) = 0$.

(S4) 把 A 中某一列的倍式加到另一列上得到矩阵 B , 则

$$\det(B) = \det(A).$$

性质 (S1) 来自斜对称函数的定义. 性质 (S2) 是上周讲义引理 1.5 的直接推论. 性质 (S3) 推导过程如下: 不妨设

$$\vec{A}^{(n)} = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \vec{A}^{(j)}.$$

则

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(\vec{A}^{(1)}, \vec{A}^{(2)}, \dots, \vec{A}^{(n-1)}, \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \vec{A}^{(j)}) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \det(\vec{A}^{(1)}, \vec{A}^{(2)}, \dots, \vec{A}^{(n-1)}, \vec{A}^{(j)}) \quad (\text{对第 } n \text{ 列用 (L4)}) \\ &= 0. \quad (\text{对和式中每个行列式用 (S2)}) \end{aligned}$$

性质 (S4) 的推导过程与 (S3) 类似. 具体过程如下, 不妨设

$$B = (\vec{A}^{(1)} + \alpha \vec{A}^{(2)}, \vec{A}^{(2)}, \dots, \vec{A}^{(n)}),$$

其中 $\alpha \in \mathbb{R}$. 则

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det(\vec{A}^{(1)} + \alpha \vec{A}^{(2)}, \vec{A}^{(2)}, \dots, \vec{A}^{(n)}) \\ &= \det(A) + \alpha \det(\vec{A}^{(2)}, \vec{A}^{(2)}, \dots, \vec{A}^{(n-1)}) \quad (\text{对第一列用 (L4)}) \\ &= \det(A). \quad (\text{对第二个行列式用 (S2)}) \end{aligned}$$

例 2.7 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$. 证明: A 不满秩蕴含 $\det(A) = 0$.

证明. 因为 A 不满秩, 所以 A 的列向量线性相关. 故某个列向量是其它列的线性组合 (第二章第一讲命题 1.11 (iii)). 由性质 (S3) 可知, $\det(A) = 0$.

例 2.8 计算 n 阶初等矩阵的行列式.

解. 由性质 (S1) 可知, $\det(F_{i,j}^{(n)}) = -1$ 在 $i \neq j$ 时成立. 否则其行列式等于 1. 由性质 (S4) 可知, $\det(F_{i,j}^{(n)})(\alpha) = 1$. 由性质 (L1) 可知, $\det(F_i^{(n)}(\lambda)) = \lambda$.

例 2.9 不利用 $2 \neq 0$ 证明: 如果方阵 A 有两列相同, 则 $\det(A) = 0$.

证明. 设 $A = (a_{i,j})_{n \times n}$ 且 $\vec{A}^{(1)} = \vec{A}^{(2)}$. 则

$$\begin{aligned}
 \det(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_{\sigma} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} \\
 &= \sum_{\sigma \in S_n, \sigma(1) < \sigma(2)} \epsilon_{\sigma} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} \\
 &\quad + \sum_{\sigma \in S_n, \sigma(1) > \sigma(2)} \epsilon_{\sigma} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} a_{\sigma(3),3} \cdots a_{\sigma(n),n} \\
 &= \sum_{\sigma \in S_n, \sigma(1) < \sigma(2)} \epsilon_{\sigma} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} a_{\sigma(3),3} \cdots a_{\sigma(n),n} \\
 &\quad - \sum_{\sigma \in S_n, \sigma(1) < \sigma(2)} \epsilon_{\sigma} a_{\sigma(2),1} a_{\sigma(1),2} a_{\sigma(3),3} \cdots a_{\sigma(n),n} \\
 &= 0 \quad (\because a_{\sigma(2),1} = a_{\sigma(2),2}, a_{\sigma(1),2} = a_{\sigma(1),1})
 \end{aligned}$$

命题 2.10 设

$$T_u = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} & \cdots & u_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{n,n} \end{pmatrix}$$

和

$$T_\ell = \begin{pmatrix} \ell_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{2,1} & \ell_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_{n,1} & \ell_{n,2} & \ell_{n,3} & \cdots & \ell_{n,n} \end{pmatrix}$$

则

$$\det(T_u) = u_{1,1}u_{2,2}\cdots u_{n,n} \quad \text{和} \quad \det(T_\ell) = \ell_{1,1}\ell_{2,2}\cdots \ell_{n,n}.$$

证明. 我们来证明上三角情形, 下三角情形类似.

设 $T_u = (u_{i,j})_{n \times n}$. 则当 $i < j$ 时, $u_{i,j} = 0$. 在 $\det(T_u)$ 的和式表示 (5) 中的一项是

$$a_\sigma = \epsilon_\sigma u_{1,\sigma(1)} \cdots u_{n,\sigma(n)},$$

其中 $\sigma \in S_n$. 如果存在某个 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 使得 $i > \sigma(i)$, 则 $a_\sigma = 0$. 于是, $a_\sigma \neq 0$ 蕴含 $i \leq \sigma(i)$ 对所有 $i = 1, 2, \dots, n$ 成立. 故 σ 必然是恒同映射. 我们得到

$$\det(T_u) = a_e = \epsilon_e u_{1,e(1)} \cdots u_{n,e(n)} = u_{1,1} \cdots u_{n,n}. \quad \square$$

计算行列式的一个基本方法是通过第一和第二类初等变换把给定的行列式对应的矩阵化为上三角或下三角形矩阵, 然后利用命题 2.10 计算给定行列式的值.

需要注意的是: 应用一次第一类初等变换行列式的值会变号(性质(S1)); 而应用一次第二类初等变换行列式的值不变(性质(S4)). 当利用第三类初等变换时, 行列式要乘以适当的实数.

例 2.11 计算矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的行列式的值.

证明. 利用第二类初等行变换可得

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -8.$$

利用第一类初等行变换可得

$$\det(B) = -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1.$$

例 2.12 展开 n 阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$$

的行列式.

解. 多次应用性质 (S_4) 可得

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a + (n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a + (n-1)b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a + (n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

根据性质 $(L1)$ 得

$$\det(A) = (a + (n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

再利用第二类初等行变换, 我们有

$$\det(A) = (a + (n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = (a + (n-1)b)(a-b)^{n-1}.$$

定理 2.13 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$. 则 $\det(A) \neq 0$ 当且仅当 $\text{rank}(A) = n$.

证明. 根据例 2.7, 我们有 $\det(A) \neq 0 \implies \text{rank}(A) = n$. 反之, 设 $\text{rank}(A) = n$. 则通过第一和第二类初等行变换, 我们可以把 A 变成阶梯型(上三角)矩阵

$$T_u = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} & \cdots & u_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{n,n} \end{pmatrix}.$$

于是, $\det(A) = \pm \det(T_u)$. 根据第二章第二讲引理 3.2, $\text{rank}(T_u) = n$. 我们推出 T_u 对角线上的元素都非零. 根据命题 2.10, $\det(T_u) \neq 0$. 从而 $\det(A) \neq 0$. $\square$

推论 2.14 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$. 则 $\det(A) \neq 0$ 当且仅当 A 可逆.

证明. 由上述定理和第二章第五讲定理 7.14 直接可得. $\square$

例 2.15 证明实数上的奇数阶斜对称矩阵都不可逆.

证明. 由例 2.6 可知, 任何奇数阶斜对称矩阵的行列式都等于零. 根据上述推论, 奇数阶斜对称矩阵都不可逆.

3 行列式的进一步性质

3.1 行列式按一行(列)展开

定义 3.1 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. 去掉 A 中第 i 行和第 j 列得到的 $(n-1)$ 阶方阵的行列式称为 A 关于 i 行和第 j 列的 $(n-1)$ 阶余子式(*co-minor*), 记为 $M_{i,j}$. 而 $A_{i,j} := (-1)^{i+j} M_{i,j}$ 称为 A 关于 i 行和第 j 列的代数余子式.

例 3.2 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

则

$$M_{1,1} = \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad A_{2,3} = (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = -M_{2,3}.$$

定理 3.3 设 $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$. 则对于任意的 $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$\det(A) = \underbrace{\sum_{k=1}^n a_{i,k} A_{i,k}}_{\text{按一行展开}} \quad \text{和} \quad \det(A) = \underbrace{\sum_{k=1}^n a_{k,j} A_{k,j}}_{\text{按一列展开}}.$$

证明. 断言 1. 设 A 中最后一行中前 $(n-1)$ 个元素都等于零. 则 $\det(A) = a_{n,n} A_{n,n}$.

断言 1 的证明. 由行列式的定义可知

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_{\sigma} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n-1,\sigma(n-1)} a_{n,\sigma(n)}.$$

因为当 $n \neq \sigma(n)$ 时, $a_{n,\sigma(n)} = 0$, 所以

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n, \sigma(n)=n} \epsilon_{\sigma} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n-1,\sigma(n-1)} a_{n,n}.$$

故

$$\det(A) = a_{n,n} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \epsilon_{\tau} a_{1,\tau(1)} \cdots a_{n-1,\tau(n-1)} = a_{n,n} M_{n,n} = a_{n,n} A_{n,n}.$$

断言 1 成立.

断言 2. 设 A 中第 i 行中只有第 j 个元素非零. 则 $\det(A) = a_{i,j} A_{i,j}$.

断言 2 的证明. 把 A 中第 i 行与 $\vec{A}_{i+1}, \dots, \vec{A}_n$ 逐个对调, 然后把所得矩阵的第 j 列与第 $(j+1)$ 列至第 n 列逐个对调, 我们得到矩阵

$$B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} & a_{1,j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} & a_{i-1,j} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} & a_{i+1,j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,j-1} & a_{n-1,j+1} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{n-1,j} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{i,j} \end{pmatrix}.$$

由断言 1, $\det(B) = a_{i,j}M_{i,j}$. 由行列式性质 (S1),

$$\det(B) = (-1)^{n-i+n-j} \det(A) = (-1)^{i+j} \det(A) \implies \det(A) = a_{i,j}A_{i,j}.$$

断言 2 成立.

下面考虑一般情形. 由行列式的多重线性和断言 2 可知

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n \det \begin{pmatrix} \vec{A}_1 \\ \vdots \\ \vec{A}_{i-1} \\ 0 \cdots 0, a_{i,j}, 0, \cdots 0 \\ \vec{A}_{i+1} \\ \vdots \\ \vec{A}_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{i,j} A_{i,j}.$$

我们证明了按行展开的公式. 按列展开的公式可以类似证明, 或通过行列式的转置公式和行展开公式证明. $\square$

例 3.4 展开行列式

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

解. 利用上述定理证明中的断言 2, 我们有

$$D = -2 \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -10 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

再利用第二类初等行变换得

$$D = -10 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 20 \times 6 \times (-7 - 2) = -1080.$$

例 3.5 *Vandermonde* 行列式. 设 $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$. 求次数为 $n - 1$ 次实系数多项式

$$f(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

使得

$$f(\alpha_i) = \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

即

$$a_0 + a_1\alpha_i + \dots + a_{n-2}\alpha_i^{n-2} + a_{n-1}\alpha_i^{n-1} = \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

其中 $a_0, a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}$ 是 n 个未知数. 利用矩阵表示,

我们有

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n-2} & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{n-2} & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_{n-1}^{n-2} & \alpha_{n-1}^{n-1} \\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^{n-2} & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

记 $V_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \det(A)$. 称之为关于 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 的 Vandermonde 行列式. 该行列式也简记为 V_n .

展开 V_n 有多种方法. 我们这里采用初等变换和数学归纳法. 当 $n = 2$ 时,

$$V_2 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 1 & \alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_2 - \alpha_1.$$

$$\begin{aligned} V_3 &= \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \\ 0 & \alpha_2 - \alpha_1 & \alpha_2^2 - \alpha_1^2 \\ 0 & \alpha_3 - \alpha_1 & \alpha_3^2 - \alpha_1^2 \end{vmatrix} \\ &= (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1) \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \\ 0 & 1 & \alpha_2 + \alpha_1 \\ 0 & 1 & \alpha_3 + \alpha_1 \end{vmatrix} = (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2). \end{aligned}$$

猜测: $V_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)$. 设 $n > 3$ 且阶数小于 n 时

猜测成立. 当 n 时,

$$\begin{aligned}
V_n &= \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n-2} & \alpha_1^{n-2}(\alpha_1 - \alpha_n) \\ 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{n-2} & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2 - \alpha_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_{n-1}^{n-2} & \alpha_{n-1}^{n-2}(\alpha_{n-1} - \alpha_n) \\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^{n-2} & 0 \end{vmatrix} \quad (AF_{n-1,n}(-\alpha_n)) \\
&= \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n-3}(\alpha_1 - \alpha_n) & \alpha_1^{n-2}(\alpha_1 - \alpha_n) \\ 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{n-3}(\alpha_2 - \alpha_n) & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2 - \alpha_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_{n-1}^{n-3}(\alpha_{n-1} - \alpha_n) & \alpha_{n-1}^{n-2}(\alpha_{n-1} - \alpha_n) \\ 1 & \alpha_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&\quad (AF_{n-1,n}(-\alpha_n)F_{n-2,n-1}(-\alpha_n)) \\
&= \cdots \\
&= \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 - \alpha_n & \cdots & \alpha_1^{n-3}(\alpha_1 - \alpha_n) & \alpha_1^{n-2}(\alpha_1 - \alpha_n) \\ 1 & \alpha_2 - \alpha_n & \cdots & \alpha_2^{n-3}(\alpha_2 - \alpha_n) & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2 - \alpha_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_{n-1} - \alpha_n & \cdots & \alpha_{n-1}^{n-3}(\alpha_{n-1} - \alpha_n) & \alpha_{n-1}^{n-2}(\alpha_{n-1} - \alpha_n) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&\quad (AF_{n-1,n}(-\alpha_n)F_{n-2,n-1}(-\alpha_n) \cdots F_{1,2}(-\alpha_n)) \\
&= (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^{n-1} (\alpha_i - \alpha_n) V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \\
&= \prod_{i=1}^{n-1} (\alpha_n - \alpha_i) V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \\
&= \prod_{i=1}^{n-1} (\alpha_n - \alpha_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (\alpha_j - \alpha_i) \\
&= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i).
\end{aligned}$$

猜测成立. 由此可知, A 满秩当且仅当 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 两两不同. 此时, 所求多项式存在且唯一.

例 3.6 计算

$$D_n = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

解. 直接计算得 $D_1 = 2$, $D_2 = 3$,

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 4.$$

猜测: $D_n = n + 1$.

设 $n > 3$ 且当阶数小于 n 时猜测成立. 按第一列展开

得

$$\begin{aligned}
 D_n &= 2D_{n-1} - \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= 2D_{n-1} - D_{n-2} = 2n - (n-1) = n+1.
 \end{aligned}$$

猜测成立.