

第五章 多项式和复数域

3.5 应用举例

回顾第十一次习题 2. 展开下列行列式:

$$D_n = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}.$$

解. 直接计算得 $D_1 = 1$ 和 $D_2 = -1$. 设 $n > 2$. 把第 2 至第 n 列加到第一列得:

$$D_n = \det \begin{pmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ \frac{n(n+1)}{2} & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ \frac{n(n+1)}{2} & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{n(n+1)}{2} & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \frac{n(n+1)}{2} & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}.$$

故

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}.$$

逐行相减得

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

于是,

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}.$$

把第 2 至第 $n-1$ 列加到第一列得:

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2} \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ -1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}.$$

故

$$D_n = -\frac{n(n+1)}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}.$$

用第一列去减其它列得

$$D_n = -\frac{n(n+1)}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 1 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}.$$

按最后一行展开得

$$D_n = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2} \det \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -n \\ 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -n & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(n-2) \times (n-2)}.$$

由此可知,

$$D_n = (-1)^{\frac{(n-2)(n-3)}{2} + n+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \det \left(\text{diag}(\underbrace{-n, \dots, -n}_{n-2}) \right).$$

故当 $n > 2$ 时,

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^{\frac{(n-2)(n-3)}{2} + 2n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} n^{n-2} \\ &= (-1)^{\frac{n^2-n+4}{2}} \cdot \frac{n(n+1)}{2} n^{n-2} \\ &= (-1)^{\frac{n^2-n}{2}} \cdot \frac{n(n+1)}{2} n^{n-2} \end{aligned}$$

例 3.10 设循环矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \cdots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

计算 A 的行列式. 当矩阵 A 可逆时, 求 A^{-1} .

解. 设 $\epsilon_0, \dots, \epsilon_{n-1}$ 是 n 个 n 次单位根. 令

$$f = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-1} \in \mathbb{C}[x].$$

对 $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, 利用 $\epsilon_k^n = 1$ 得到

$$f(\epsilon_k) = a_0 + a_1\epsilon_k + \dots + a_{n-2}\epsilon_k^{n-2} + a_{n-1}\epsilon_k^{n-1},$$

$$\epsilon_k f(\epsilon_k) = a_{n-1} + a_0\epsilon_k + \dots + a_{n-3}\epsilon_k^{n-2} + a_{n-2}\epsilon_k^{n-1},$$

$$\epsilon_k^2 f(\epsilon_k) = a_{n-2} + a_{n-1}\epsilon_k + \dots + a_{n-4}\epsilon_k^{n-2} + a_{n-3}\epsilon_k^{n-1},$$

$\vdots$

$$\epsilon_k^{n-1} f(\epsilon_k) = a_1 + a_2\epsilon_k + \dots + a_{n-1}\epsilon_k^{n-2} + a_0\epsilon_k^{n-1}.$$

利用矩阵写成

$$f(\epsilon_k) \begin{pmatrix} 1 \\ \epsilon_k \\ \epsilon_k^2 \\ \vdots \\ \epsilon_k^{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ \epsilon_k \\ \epsilon_k^2 \\ \vdots \\ \epsilon_k^{n-1} \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

设

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \epsilon_0 & \epsilon_1 & \dots & \epsilon_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon_0^{n-1} & \epsilon_1^{n-1} & \dots & \epsilon_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

则 $V\text{diag}(f(\epsilon_0), \dots, f(\epsilon_{n-1})) = AV$. 由 *Vandermonde* 行列式可知, V 可逆. 故

$$A = V\text{diag}(f(\epsilon_0), \dots, f(\epsilon_{n-1}))V^{-1}.$$

两边取行列式得

$$\det(A) = f(\epsilon_0) \cdots f(\epsilon_{n-1}).$$

而 A 可逆当且仅当任何 n 次单位根都不是 f 的根. 此时,

$$A^{-1} = V\text{diag}(f(\epsilon_0)^{-1}, \dots, f(\epsilon_{n-1})^{-1})V^{-1}.$$

例 3.11 设

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} \mid u, v \in \mathbb{C} \right\}.$$

则 $(H, +, O, \cdot, E)$ 是 $M_2(\mathbb{C})$ 中的非交换子环, 且 H 中的每个非零元在 H 中有可逆元. 这是数学史上第一个斜域 (*skew-field*), 称为 *Hamilton* 四元数系.

验证如下:

$$(i) \text{ 设 } W = \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} \text{ 和 } Z = \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix}, \text{ 其中 } u, v, x, y \in \mathbb{C}.$$

我们有

$$W - Z = \begin{pmatrix} u - x & v - y \\ -\bar{v} + \bar{y} & \bar{u} - \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - x & v - y \\ -\overline{v - y} & \overline{u - x} \end{pmatrix} \in H.$$

故 $(H, +, O)$ 是 $(M_2(\mathbb{C}), +, O)$ 的子群.

计算

$$WZ = \begin{pmatrix} ux - v\bar{y} & uy + v\bar{x} \\ -\bar{v}x - \bar{u}\bar{y} & -\bar{v}y + \bar{u}\bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ux - v\bar{y} & uy + v\bar{x} \\ -\overline{(uy + v\bar{x})} & \overline{ux - v\bar{y}} \end{pmatrix} \in H.$$

注意到

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \in H.$$

故 H 是 $M_2(\mathbb{C})$ 的子环.

(ii) 设 $A = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix}$ 和 $B = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}$. 则 $A, B \in H$.

直接计算得

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

因为 $AB \neq BA$, 所以 H 不是交换环.

(iii) 设 $W \neq O$. 则 $\det(W) = |u|^2 + |v|^2 \neq 0$. 故 W 是可逆矩阵. 在 $M_n(\mathbb{C})$ 中,

$$W^{-1} = \frac{1}{u\bar{u} + v\bar{v}} \begin{pmatrix} \bar{u} & -v \\ \bar{v} & u \end{pmatrix} \in H.$$

故 W 在 H 中可逆.

期末小结

矩阵部分

设 F 是域.

1. 秩不等式: 设 $A \in F^{m \times s}, B \in F^{s \times n}$ 则

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) - s \leq \text{rank}(AB) \leq \min(\text{rank}(A), \text{rank}(B)).$$

2. 乘以满秩方阵不改变原矩阵的秩.

- 利用矩阵分块证明秩不等式
- 利用解空间(核空间)和列空间(像空间)证明秩不等式

3. 方阵

- (a) $(M_n(F), +, O, \cdot, E)$ 是非交换环且对任意 $\lambda \in F$, $A, B \in M_n(F)$,

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B, \quad \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B).$$

- (b) A 可逆当且仅当 A 满秩;
- (c) A 是左(右)零因子当且仅当 A 亏秩且 $A \neq O$;
- (d) A 是中心元当且仅当 A 是数乘矩阵, 矩阵的迹是交换不变量;

- (e) $(M_n(F), +, O, \cdot, E)$ 所有可逆矩阵对于乘法构成群 $GL_n(F)$, 称为 F 上的一般线性群. 特别有: 对于任意 $A, B \in GL_n(F)$

$$(A^{-1})^{-1} = A \quad \text{和} \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

4. 初等等价

- (a) 第 I、II、III 类初等矩阵的定义、意义和它们的逆都是同类初等矩阵;
- (b) 打洞引理;
- (c) 可逆矩阵是初等矩阵之积, 等价地说法, $GL_n(F)$ 的一组生成元是所有 F 上的 $n \times n$ 初等矩阵.

5. 矩阵求逆

- (a) 行变换法 ([送分童子](#))
- (b) 多项式法: 设 $A \in M_n(F)$. 则存在 $f \in F[A] \setminus 0$ 使得 $f(A) = 0$. 设 f 是满足上述条件的次数最小的多项式. 则 A 可逆当且仅当 $f(0) \neq 0$. 此时, 通过 f 可以求出 $g \in F[x]$ 使得 $A^{-1} = g(A)$.

6. 矩阵分块运算

7. 利用矩阵分块证明秩的不等式

行列式部分

1. 定义与性质:

- (a) 行列式定义只需要加法和乘法;

$$\det((a_{i,j})_{n \times n}) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_{\sigma} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}.$$

- (b) 行列式多重线性斜对称, 且如果有两行或两列相同, 则行列式的值等于零;
- (c) 转置保持行列式的值;
- (d) 行列式乘积定理.

2. 行列式的计算

- (a) 利用初等行列变换化为上(下)三角形;
- (b) 行列加减和逐行(列)消去
- (c) 利用按一行一列展开找递归公式(例如三对角行列式 – [送分童子](#)), 并用归纳法证明该公式;
- (d) 利用分块矩阵计算行列式.

3. 行列式的应用

- (a) 伴随矩阵和原矩阵的逆的关系. 当 A 可逆时,
 $A^{-1} = A^{\vee} / \det(A)$.

- (b) Cramer 法则;
- (c) 矩阵的秩和它子式的关系, 方阵可逆当且仅当其行列式非零.

群、环、域

1. 群

- (a) 群、同态、同构、子群的定义, 子群的判别法;
- (b) 最低阶的非循环群, 最低阶的非交换群;
- (c) 群和子群的生成元;
- (d) 群中元素的阶的计算;
- (e) 循环群的分类, 确定循环群的所有子群.
- (f) Lagrange 定理 和 Cayley 定理 ([送分童子](#)).

2. 环

- (a) 环、同态、同构 ([送分童子](#))、子环;
- (b) 广义分配律;
- (c) 子环的验证;
- (d) 环中的左和右零因子和可逆元, 环中所有可逆元组成的乘法群, 确定环中的可逆元和左右零因子;

3. 域

- (a) 域、子域, 域的特征,
- (b) 整环的分式域 (不要求证明),
- (c) $\mathbb{Z}_p$ 中的运算和域上的线性代数 (送分童子).

一元多项式

1. 在 $R[x]$ 中

- (a) 次数、首项系数
- (b) 加法、乘法
- (c) 赋值同态: 设 $f \in F[x]$, $r \in F$, $A \in M_n(F)$. 计算 $f(r)$ 和 $f(A)$. 设 $g \in \mathbb{Z}[x]$, $\bar{k} \in \mathbb{Z}_n$. 计算 $g(\bar{k})$.
- (d) 多项式的除法和代入矩阵 (送分童子).
- (e) 多项式的根