

第一章 预备知识

3 线性方程组的解集

关于集合的基本语言见 <http://www.mmrc.iss.ac.cn/~zmli/LinearAlgebra-2022-2023/LectureNotes/LA1-2.pdf> 第 3 节. 基本符号:

正整数集	非负整数集	整数集	有理数集	实数集	复数集
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$\mathbb{Z}^+$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$

我们有: $\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

设 $S_1, \dots, S_k$ 是非空集合. 它们的笛卡尔积 (*Cartisian Product*) 是指集合

$$\{(x_1, \dots, x_k) \mid x_1 \in S_1, \dots, x_k \in S_k\}.$$

记为 $S_1 \times \dots \times S_k$. 当 $S_1, \dots, S_k$ 都等于集合 S 时. 集合 $\underbrace{S \times \dots \times S}_k$ 简记为 S^k . 例如二维实平面可简记为 $\mathbb{R}^2$.

如果集合中含有有限多个元素, 则该集合称为有限集. 否则称之为无限集. 对有限集 S , 它中元素的个数记为 $|S|$ 或 $\text{card}(S)$, 其中 card 是 *cardinality* 的缩写. 特别地, $\text{card}(\emptyset) = 0$. 对于无限集, $\text{card}(S) = \infty$.

最后, 我们用集合论的语言来刻画线性方程组的解.

设 L 是关于未知数 $x_1, \dots, x_n$ 的线性方程组. 令

$$\text{sol}(L) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ 使得 } x_1 = \alpha_1, \dots, x_n = \alpha_n \text{ 是 } L \text{ 的解} \right\}.$$

称之为 L 的解的集合. 则 L 相容当且仅当 $\text{sol}(L) \neq \emptyset$; L 确定当且仅当 $\text{card}(\text{sol}(L)) = 1$.

命题 3.1 设齐次线性方程组是 H 的系数矩阵是 A , 设 L 是以 $(A|\mathbf{b})$ 为增广矩阵的线性方程组. 设

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

是 (L) 的一个解. 则

$$\text{sol}(L) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in \text{sol}(H) \right\}.$$

证明. 令 $A = (a_{i,j})_{m \times n}$,

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad S = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in \text{sol}(H) \right\}.$$

设

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in S.$$

则存在

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \in \text{sol}(H) \quad \text{使得} \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \mu_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \mu_n \end{pmatrix}$$

对任意 $i \in \{1, \dots, m\}$,

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} \lambda_j = \sum_{j=1}^n a_{i,j} (\alpha_j + \mu_j) = \sum_{j=1}^n a_{i,j} \alpha_j + \sum_{j=1}^n a_{i,j} \mu_j = b_i + 0 = b_i.$$

故

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \text{sol}(L).$$

我们有 $S \subset \text{sol}(L)$.

反之, 设

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \text{sol}(L).$$

则

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + (\lambda_1 - \alpha_1) \\ \vdots \\ \alpha_n + (\lambda_n - \alpha_n) \end{pmatrix}.$$

对 $i \in \{1, \dots, m\}$,

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j}(\lambda_j - \alpha_j) = \sum_{j=1}^n a_{i,j}\lambda_j - \sum_{j=1}^n a_{i,j}\alpha_j = b_i - b_i = 0.$$

故

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 - \alpha_1 \\ \vdots \\ \lambda_n - \alpha_n \end{pmatrix} \in \text{sol}(H).$$

我们有 $\text{sol}(L) \subset S$.

综上所述, $\text{sol}(L) = S$. $\square$

4 映射

4.1 定义、例子和类型

定义 4.1 设 S 和 T 是两个非空集合, $f \subset S \times T$. 如果对任意的 $x \in S$, 存在唯一 $y \in T$ 使得 $(x, y) \in f$. 则称 f 是从 S 到 T 的映射 (map).

通常我们把从 S 到 T 的映射 f 记为:

$$\begin{aligned} f : S &\longrightarrow T \\ x &\mapsto y, \end{aligned}$$

其中, $(x, y) \in f$. 因为 y 唯一, 所以我们把 y 记为 $f(x)$. 该映射也简记为 $f : S \longrightarrow T$.

例 4.2 从国科大在读学生的学号到对应学生的姓名是一个映射. 但从学生姓名到他们对应的学号就不一定是映射, 这是因为有重名的可能.

以下映射在今后经常会用到.

例 4.3 映射

$$\begin{aligned} f : S &\longrightarrow S \\ x &\mapsto x. \end{aligned}$$

称为集合 S 上的恒同映射, 通常记为 id_S , 其中 id 是 *identity* 的缩写.

例 4.4 设 S' 是集合 S 的非空子集, $f : S \rightarrow T$ 是映射. 则

$$\begin{aligned} g : S' &\longrightarrow T \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

是从 S' 到 T 的映射. 称为 f 在 S' 上的限制, 记为 $f|_{S'}$.

例 4.5 设 S' 是 S 的非空子集. 定义

$$\begin{aligned} i_{S'} : S' &\longrightarrow S \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

称为 S' 到 S 的嵌入.

例 4.6 映射

$$\begin{aligned} p_S : S \times T &\longrightarrow S \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned}$$

称为从 $S \times T$ 到 S 的投影 (*projection*). 类似地, 我们可以定义从 $S \times T$ 到 T 的投影.

定义 4.7 考虑映射 $f : S \longrightarrow T$.

(i) 如果对任意 $x_1, x_2 \in S$ 且 $x_1 \neq x_2$, 我们都有

$$f(x_1) \neq f(x_2).$$

则称 f 是单射 (injection).

(ii) 如果对任意 $y \in T$, 存在 $x \in S$ 使得 $y = f(x)$, 则称 f 是满射 (surjection).

(iii) 如果 f 既是单射又是满射, 则称 f 是双射 (bijection).

例 4.8 恒同映射是双射.

考虑映射

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2. \end{aligned}$$

它既不是单射也不是满射. 设 $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$. 则 $f|_{\mathbb{R}^+}$ 是单射.

嵌入 $i'_S : S' \longrightarrow S$ 是单射, 投影 $p_S : S \times T \longrightarrow S$ 是满射. 函数 $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 不是单射. 但 $\cos|_{[0,\pi]}$ 是单射.

4.2 像集和原像集

设 $f : S \longrightarrow T$ 是映射, 且 $S' \subset S$. 集合

$$f(S') = \{f(x) | x \in S'\}$$

称为 S' 在 f 下的像集. 特别地, $f(S)$ 称为 f 的像集, 记为 $\text{im}(f)$, 这里 im 是 image 的缩写. 映射 f 是满射当且仅当 $f(S) = T$.

设 $T' \subset T$. 集合

$$f^{-1}(T') = \{x \in S | f(x) \in T'\}$$

称为 T' 在 f 下的原像集(逆像集). 由映射的定义可知 $f^{-1}(T) = S$.

设 $t \in T$. 我们称 $f^{-1}(\{t\})$ 是 t 关于 f 的纤维(*fibre*). 我们可以利用纤维来描述单射、满射和双射. 映射 f 是单射当且仅当关于 f 的每个纤维至多含有一个元素, f 是满

射当且仅当它的每个纤维非空, f 是双射当且仅当它的每个纤维恰好含有一个元素.

例 4.9 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 由公式 $f(x) = \sin(x)$ 给出. 则

$$\text{im}(f) = [-1, 1], \quad f((0, \pi)) = (0, 1], \quad f^{-1}(\{0\}) = \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}.$$

例 4.10 设 $f: X \rightarrow Y$ 是映射, $A \subset X$ 和 $B \subset Y$. 证明:

$$(i) \quad A \subset f^{-1}(f(A)).$$

$$(ii) \quad f(f^{-1}(B)) \subset B.$$

证明. (i) 设 $a \in A$. 则 $f(a) \in f(A)$. 故 $a \in f^{-1}(f(A))$. 结论成立.

(ii) 设 $b \in f(f^{-1}(B))$. 则存在 $c \in f^{-1}(B)$ 使得 $b = f(c)$. 由 $f^{-1}(B)$ 的定义可知 $b \in B$. 结论成立. $\square$

4.3 映射的复合

设 $f: S \rightarrow T$ 和 $g: T \rightarrow U$ 是两个映射. 则我们可以定义一个新的映射

$$\begin{aligned} \phi: S &\longrightarrow U \\ x &\mapsto g(f(x)). \end{aligned}$$

我们称该映射为 f 和 g 的复合 (*composition*), 记为 $g \circ f$. 复合可以通过下列图表形象地表示:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & T \\ & \searrow g \circ f & \downarrow g \\ & & U. \end{array}$$

命题 4.11 设 $f : S \longrightarrow T$ 和 $g : T \longrightarrow U$ 是两个映射.

- (i) 如果 f 和 g 都是单射, 则 $g \circ f$ 也是单射;
- (ii) 如果 f 和 g 都是满射, 则 $g \circ f$ 也是满射;
- (iii) 如果 f 和 g 都是双射, 则 $g \circ f$ 也是双射.

证明. (i) 设 $x, y \in S$ 且 $x \neq y$. 因为 f 是单射, 所以 $f(x) \neq f(y)$. 又因为 g 是单射, 所以 $g(f(x)) \neq g(f(y))$. 于是, $g \circ f$ 是单射.

(ii) 设 $z \in U$. 因为 g 是满射, 所以存在 $y \in T$ 使得 $g(y) = z$. 又因为 f 是满射, 所以存在 $x \in S$ 使得 $y = f(x)$. 于是, $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$. 故 $g \circ f$ 是满射.

(iii) 是 (i) 和 (ii) 的简单推论. $\square$

设 $f : S \longrightarrow T$ 和 $g : T \longrightarrow S$ 是两个映射. 则 $g \circ f : S \longrightarrow S$ 和 $f \circ g : T \longrightarrow T$ 是两个有意义的映射. 当 $S \neq T$ 时, 这两个映射不同. 事实上, 当 $S = T$ 时, 交换律 $g \circ f = f \circ g$ 也不成立.

例 4.12 设

$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{和} \quad \begin{array}{ccc} g: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1. \end{array}$$

则对任意的 $x \in \mathbb{R}$, $g \circ f(x) = g(x^2) = x^2 + 1$. 而

$$f \circ \text{id}_S(x) = f(\text{id}_S(x)) = f(x).$$

故 $f \circ \text{id}_S = f$. 类似地,

$$\text{id}_T \circ f(x) = \text{id}_T(f(x)) = f(x).$$

故 $\text{id}_T \circ f = f$. $\square$

下面我们证明映射的复合满足结合律.

定理 4.13 设 $f: S \rightarrow T$, $g: T \rightarrow U$ 和 $h: U \rightarrow V$. 则

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

证明. 对任意 $x \in S$,

$$h \circ (g \circ f)(x) = h(g \circ f(x)) = h(g(f(x)))$$

且

$$(h \circ g) \circ f(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))).$$

于是, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. $\square$

映射的结合律可以通过下列交换图形象地表示.

$$\begin{array}{ccccc}
 S & \xrightarrow{\textcolor{red}{f}} & T & & \\
 & \searrow \textcolor{blue}{g \circ f} & \downarrow g & \searrow \textcolor{red}{h \circ g} & \\
 & & U & \xrightarrow{\textcolor{blue}{h}} & V.
 \end{array}$$

即通过红色箭头和蓝色箭头把 S 中一个元素映到 V 中同一个元素. 进而, 我们可以把三个函数 f, g, h 的复合写成 $h \circ g \circ f$. 这一简略的写法也适合多个函数的复合. 例如对映射 $\phi : S \longrightarrow S$ 和 $k \in \mathbb{Z}^+$,

$$\phi^k := \underbrace{\phi \circ \cdots \circ \phi}_k.$$

此外, $\phi^0 := \text{id}_S$.