第二章　矩阵

3　矩阵的秩

3.1　初等行变换下的不变量

计算过程(算法)中不变的量往往反映被计算对象的基本特征. 本小节研究关于矩阵初等行变换下的不变量.

定义 3.1 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 由 A 的行向量 $\vec{A}_1,\ldots,\vec{A}_m$ 在行空间 $\mathbb{R}^{1\times n}$ 中生成的子空间称为 A 的行空间. 记为 $V_r(A)$. 由 A 的列向量 $\vec{A}^{(1)},\ldots,\vec{A}^{(n)}$ 在列空间 $\mathbb{R}^m$ 中生成的子空间称为 A 的列空间. 记为 $V_c(A)$. 矩阵 A 的行秩是 $\dim(V_r(A))$, 列秩是 $\dim(V_c(A))$.

本节的主要结论是一个矩阵的行秩等于列秩.

引理 3.2 设 $A{\in}\mathbb{R}^{m\times n}$, $B{\in}\mathbb{R}^{m\times n}$ 是通过一次初等行变换得到的. 则 $V_r(A){=}V_r(B)$. 特别地, A 和 B 的行秩相同.

证明. 当 B 是由 A 通过一次第一类初等行变换得到的, 则 A 和 B 有共同的行向量. 故 $V_r(A)=V_r(B)$.

当 B 是由 A 通过一次第二类初等行变换得到的, 设 $\vec{A}_k=\vec{B}_k$, $k=1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,m$, 而 $\vec{B}_j=\vec{A}_j+\lambda\vec{A}_i$, 其中 $i\neq j$ 和 $\lambda\in\mathbb{R}$. 则 B 的所有行向量在 $V_r(A)$ 中. 故

$V_r(B) \subset V_r(A)$ (第二章第一讲命题 1.25 (ii)). 因为 $i \neq j$, 所以 $\vec{A}_i = \vec{B}_i$. 故 $\vec{A}_j = \vec{B}_j - \lambda\vec{B}_i$. 由此可知, A 的行向量都在 $V_r(B)$ 中. 同样的命题蕴含 $V_r(A) \subset V_r(B)$.

当 B 是由 A 通过一次第三类初等行变换得到的, 设 $\vec{A}_k = \vec{B}_k$, $k = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, m$, 而 $\vec{B}_j = \lambda\vec{A}_j$, 其中 $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. 则 B 的所有行向量在 $V_r(A)$ 中. 故 $V_r(B) \subset V_r(A)$ (第二章第一讲命题 1.25 (ii)). 因为 $\lambda \neq 0$, 所以 $\vec{A}_j = \lambda^{-1}\vec{B}_j$. 故 A 的行向量都在 $V_r(B)$ 中. 同样的命题蕴含 $V_r(A) \subset V_r(B)$. $\square$

例 3.3 *第二类初等行变换得:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: B.$$

注意到 $V_c(A) \neq V_c(B)$.

一个令人意外得结论是:

引理 3.4 *设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 设 $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 是通过一次初等行变换得到的. 则 A 和 B 的列秩相同.*

证明. 设以 A 和 B 为系数矩阵的齐次线性方程组分别是 H_A 和 H_B. 则 H_A 和 H_B 等价 (第一章第一讲命题 2.2). 不妨设 $\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(r)}$ 是 A 中列向量的极大线性无关组.

断言. $\vec{B}^{(1)}, \ldots, \vec{B}^{(r)}$ 线性无关.

断言的证明. 设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ 使得

$$\alpha_1 \vec{B}^{(1)} + \cdots + \alpha_r \vec{B}^{(r)} = \mathbf{0}_m.$$

则 $\alpha_1 \vec{B}^{(1)} + \cdots + \alpha_r \vec{B}^{(r)} + 0\vec{B}^{(r+1)} + \cdots + 0\vec{B}^{(n)} = \mathbf{0}_m$. 换言之, 列向量

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

是方程组 H_B 的一个解. 故它也是 H_A 的一个解. 即

$$\alpha_1 \vec{A}^{(1)} + \cdots + \alpha_r \vec{A}^{(r)} + 0\vec{A}^{(r+1)} + \cdots + 0\vec{A}^{(n)} = \mathbf{0}_m.$$

我们得到 $\alpha_1 \vec{A}^{(1)} + \cdots + \alpha_r \vec{A}^{(r)} = \mathbf{0}_m$. 因为 $\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(r)}$ 线性无关, 所以 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$. 于是, $\vec{B}^{(1)}, \ldots, \vec{B}^{(r)}$ 线性无关. 断言成立.

设 $j \in \{r+1, \ldots, n\}$. 则存在 $\beta_1, \ldots, \beta_r \in \mathbb{R}$ 使得 $\vec{A}^{(j)} = \beta_1 \vec{A}^{(1)} + \cdots + \beta_r \vec{A}^{(r)}$. 这是因为 $\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(r)}$ 是 A 中列向量的极大线性无关组. 我们得到

$$\begin{aligned} &\beta_1 \vec{A}^{(1)} + \cdots + \beta_r \vec{A}^{(r)} \\ &+ 0\vec{A}^{(r+1)} + \cdots + 0\vec{A}^{(j-1)} + (-1)\vec{A}^{(j)} \\ &+ 0\vec{A}^{(j+1)} + \cdots + 0\vec{A}^{(n)} = \mathbf{0}_m. \end{aligned}$$

换言之, 列向量

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ \\ \\ j \to \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

是 H_A 的解. 于是, 它也是 H_B 的解. 我们有

$$\vec{B}^{(j)} = \beta_1 \vec{B}^{(1)} + \cdots + \beta_r \vec{B}^{(r)}.$$

再根据断言可知 $\vec{B}^{(1)}, \ldots, \vec{B}^{(r)}$ 是 B 中列向量的极大线性无关组. 故

$$\dim(V_c(A)) = r = \dim(V_c(B)). \quad \square$$

在矩阵中互换两列的位置称为第一类初等列变换, 把一列通乘一个实数加到另一列上称为第二类初等列变换, 把一列通乘一个非零实数称为第三类初等列变换. 它们统称为初等列变换. 类似引理 3.2，我们有

引理 3.5 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$. 设 $B\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 是通过一次初等列变换得到的. 则 $V_c(A)=V_c(B)$. 特别地, A 和 B 的列秩相同.

3.2 矩阵的秩

定理 3.6 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 则 A 的行秩等于它的列秩.

证明. 由第一章第一讲命题 2.3 可知, A 可以通过初等行变换化为阶梯型矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $\bullet$ 代表非零实数, $*$ 代表实数.

设 B 中有 k 行是非零向量. 注意到这 k 行从左至右第一个非零坐标出现的位置两两不同. 故这 k 行线性无关. 由此得出, 这 k 行是行空间 $V_r(B)$ 的一组基. 我们得到 B 的行秩等于 k.

对 B 做第二类列变换得到

$$C=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&\bullet&0&\cdots&0&0&0&0&\cdots&0&0&0&\cdots&0\\0&\cdots&0&0&0&\cdots&0&\bullet&0&0&\cdots&0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\cdots&\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&0&0&\cdots&0&0&0&0&\cdots&0&\bullet&0&\cdots&0\\0&\cdots&0&0&0&\cdots&0&0&0&0&\cdots&0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\cdots&\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&0&0&\cdots&0&0&0&0&\cdots&0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}.$$

注意到 C 中只有 k 列非零, 且这 k 列从上到下第一个非零坐标出现的位置两两不同. 故这 k 列线性无关. 由此得出, 这 k 列是列空间 $V_c(C)$ 的一组基. 我们有 C 的列秩等于 k.

根据引理 3.5, B 的列秩也等于 k. 故 B 的行秩和列秩相等. 再根据引理 3.2 和 3.4, A 的行秩和列秩相等. □

定义 3.7 *矩阵 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 行秩称为它的* 秩. *记为* $\mathrm{rank}(A)$.

由上述定理可知, 矩阵的秩既是它的行秩也是它的列秩.

对矩阵的初等行变换和列变换统称矩阵的初等变换.

推论 3.8 *设 B 是实矩阵 A 通过有限次初等变换得到的. 则* $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$.

证明. 设 B 是实矩阵 A 通过一次初等行（列）变换得到的. 根据上一讲引理 3.3 (引理 3.5) 可知, A 和 B 的行（列）秩相同. 根据定理 3.6, 它们的秩相同. □

例 3.9 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 13 \end{pmatrix}.$$

计算 $\operatorname{rank}(A)$.

解. 利用初等行变换

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -9 & -7 \\ 0 & 1 & -9 & -7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -9 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是, $\operatorname{rank}(A) = 2$.

另解. 利用初等列变换

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -9 & -7 \\ 4 & 1 & -9 & -7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是, $\operatorname{rank}(A) = 2$.

例 3.10 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 证明: $\operatorname{rank}(A) \le \min(m, n)$.

证明. 因为 $V_r(A)$ 是 $\mathbb{R}^{1\times n}$ 的子空间, 所以 $\dim(V_r(A)) \le n$ *(上一讲命题 2.14)*. 故 $\operatorname{rank}(A) \le n$. 因为 $V_c(A)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间, 所以 $\dim(V_c(A)) \le m$ *(上一讲命题 2.14)*. 故 $\operatorname{rank}(A) \le m$. □

定义 3.11 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 如果 $\operatorname{rank}(A) = m$, 则称 A 是行满秩的. 如果 $\operatorname{rank}(A) = n$, 则称 A 是列满秩的. 当 $m = n$ 且 $\operatorname{rank}(A) = n$ 时, 称 A 是满秩的.

例 3.12 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{m\times k}$. 令

$$(A, B) = (\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(n)}, \vec{B}^{(1)}, \ldots, \vec{B}^{(k)}) \in \mathbb{R}^{m\times(n+k)}.$$

证明*:* $\operatorname{rank}((A, B)) \le \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$.

证明. 设 $C = (A, B)$. 不妨设 $\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(n)}$ 的一个极大线性无关组是 $\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(s)}$; $\vec{B}^{(1)}, \ldots, \vec{B}^{(k)}$ 的一个极大线性无关组是 $\vec{B}^{(1)}, \ldots, \vec{B}^{(t)}$. 则矩阵 C 的列向量在

$$V = \langle \vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(s)}, \vec{B}^{(1)}, \ldots, \vec{B}^{(t)} \rangle$$

中. 于是, $V_c(C) \subset V$ *(*第二章第一讲命题 *1.25)*. 故 $\operatorname{rank}(C) \le \dim(V) \le s + t$. $\square$

另证. 注意到 $V_c(C) = V_c(A) + V_c(B)$. 由子空间的维数公式可知*:*

$$\begin{aligned}
\dim(V_c(C)) &= \dim(V_c(A) + V_c(B)) \\
&= \dim(V_c(A)) + \dim(V_c(B)) - \dim(V_c(A) \cap V_c(B)) \\
&\le \dim(V_c(A)) + \dim(V_c(B)).
\end{aligned}$$

故 $\operatorname{rank}(C) \le \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$. $\square$

定义 3.13 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 矩阵 A 的 *转置* 是在 $\mathbb{R}^{n\times m}$ 中的矩阵. 它在第 j 行, 第 i 列处的元素等于 A 在第 i 行, 第 j 列处的元素, 其中 $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. 矩阵 A 的转置记为 A^t.

例 3.14 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

可直接验证 $(A^t)^t = A$.

例 3.15 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 则 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^t)$.

证明. 不妨设 $\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_r$ 是 A 的行向量中的一个极大线性无关组. 则 $\operatorname{rank}(A) = r$. 可直接验证 $\vec{A}_1^t, \ldots, \vec{A}_r^t$ 是 A^t 中列向量的一个极大线性无关组. 故 $\operatorname{rank}(A^t) = r$.

4 秩与线性方程组

4.1 定性部分

定理 4.1 设 L 是以矩阵 $B = (A|\mathbf{b}) \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ 为增广矩阵的 n 元线性方程组.

(i) L *相容当且仅当* $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$.

(ii) L *确定当且仅当* $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B) = n$.

证明. (i) 注意到 $V_c(A) \subset V_c(B)$. 故 $\operatorname{rank}(A) \le \operatorname{rank}(B)$.

设 L 相容. 则 $\mathbf{b} \in V_c(A)$ (见线性方程组的向量形式). 于是, $V_c(B) \subset V_c(A)$ (命题 1.31 (ii)). 故 $V_c(A) = V_c(B)$. 从而 $\dim(V_c(A)) = \dim(V_c(B))$. 于是, $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$.

反之, 设 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$. 则 $\dim(V_c(A)) = \dim(V_c(B))$. 因为 $V_c(A) \subset V_c(B)$, 所以 $V_c(A) = V_c(B)$ (上一讲命题 2.14). 我们得到 $\mathbf{b} \in V_c(A)$, 即 L 相容 (见第二章第一讲例 1.4).

(ii) 设 L 确定. 则 L 相容. 故 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$. 下面证明 $\operatorname{rank}(A) = n$, 即 $\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(n)}$ 线性无关.

设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ 使得 $\alpha_1 \vec{A}^{(1)} + \cdots + \alpha_n \vec{A}^{(n)} = \mathbf{0}_m$. 且 $(\beta_1, \ldots, \beta_n)^t$ 是 L 的解. 则 $(\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n)^t$ 也是 L 的解. 因为 L 确定, 所以 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. 由此可知 $\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(n)}$ 线性无关. 故 $\operatorname{rank}(A) = n$.

反之, 设 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B) = n$. 由 (i) 可知 L 相容. 故 $\mathbf{b} \in V_c(A)$. 因为 $\dim(V_c(A)) = n$, 所以 $\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(n)}$ 是 $V_c(A)$ 的一组基. 于是, 存在唯一的 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ 使得 $\mathbf{b} = \lambda_1 \vec{A}^{(1)} + \cdots + \lambda_n \vec{A}^{(n)}$. 故 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^t$ 是 L 唯一解. □

推论 4.2 *设* H *是以矩阵* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *为系数矩阵的* n *元齐次线性方程组. 则* H *只有平凡解当且仅当* $\operatorname{rank}(A) = n$.

证明. 注意到 H 是以 $B=(A|\mathbf{0}_m)$ 为增广矩阵的 n 元线性方程组. 显然 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$. 根据定理 4.1 (ii). H 只有平凡解当且仅当 $\operatorname{rank}(A)=n$. □

在应用中, 由 n 个方程组成的 n 元线性方程组出现的较多. 为此, 我们给出下列两个推论.

推论 4.3 *设 L 是以矩阵 $B=(A|\mathbf{b})\in\mathbb{R}^{n\times(n+1)}$ 为增广矩阵的 n 元线性方程组. 则 L 确定当且仅当 $\operatorname{rank}(A)=n$.*

证明. 设 L 确定. 根据定理 4.1 (ii), $\operatorname{rank}(A)=n$. 反之, 设 $\operatorname{rank}(A)=n$. 则

$$n=\operatorname{rank}(A)\leq\operatorname{rank}(B)\leq\min(n+1,n)=n.$$

故 $\operatorname{rank}(B)=n$. 根据定理 4.1 (ii), L 确定. □

推论 4.4 *设 L 是以矩阵 $B=(A|\mathbf{b})\in\mathbb{R}^{n\times(n+1)}$ 为增广矩阵的 n 元线性方程组, H 是以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组. 则 L 确定当且仅当 H 确定.*

证明. 由推论 4.3 可知, L 确定当且仅当 $\operatorname{rank}(A)=n$. 再由推论 4.2 可知, $\operatorname{rank}(A)=n$ 当且仅当 H 只有平凡解. □.

例 4.5 *科斯特利金书第七页平板受热问题.*

4.2 定量部分

设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$. 以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间记为 V_A.

定理 4.6 *(对偶定理, 方程组版)* 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 则

$$\dim(V_A + \operatorname{rank}(A) = n.$$

证明. 设 $r = \operatorname{rank}(A)$ 和 H 是以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组. 不妨设 $\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(r)}$ 是 $V_c(A)$ 的一组基. 则对任意 $j \in \{r+1, \ldots, n\}$, 存在 $\alpha_{j,1}, \ldots, \alpha_{j,r}$ 使得

$$\vec{A}^{(j)} = \alpha_{j,1}\vec{A}^{(1)} + \cdots + \alpha_{j,r}\vec{A}^{(r)}.$$

令 $\mathbf{v}_j = (\alpha_{j,1}, \ldots, \alpha_{j,r}, 0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots, 0)^t$, 其中 -1 出现在第 j 个位置. 则 $\mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ 是 H 的解. 由 -1 在 $\mathbf{v}_j$ 中出现的位置可断定 $\mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ 线性无关.

对任意 $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)^t \in V_A$,

$$\mathbf{z} + z_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} + \cdots + z_n\mathbf{v}_n = (\beta_1, \ldots, \beta_r, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-r})^t \in V_A, \quad (1)$$

其中 $\beta_1, \ldots, \beta_r \in \mathbb{R}$. 这是因为 $\operatorname{sol}(H)$ 是子空间 (见第二章第一讲例 1.18 和命题 1.17). 由此可知,

$$\beta_1\vec{A}^{(1)} + \cdots + \beta_r\vec{A}^{(r)} = \mathbf{0}_m.$$

故 $\beta_1 = \cdots = \beta_r = 0$. 由 (1) 可知,

$$\mathbf{z} = (-z_{r+1})\mathbf{v}_{r+1} + \cdots + (-z_n)\mathbf{v}_n.$$

进而, $\mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ 是 $\operatorname{sol}(H)$ 的基. 故 $\dim(V_A)=n-r$. $\square$

例 4.7 计算下列齐次线性方程组 H

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{cases}$$

解空间的一组基.

解. 该方程组的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

通过初等行变换得

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

于是, $\operatorname{rank}(A) = 3$. 根据定理 *4.6*, $\dim(V_A) = 4 - 3 = 1$. 由高斯消去可知, 给定的方程组等价于:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_2 + 2x_4 = 0 \\ 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{等价于} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = x_4 \\ x_2 = -x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}.$$

令 $x_4 = 1$. 则 $x_3 = 1$, $x_2 = -1$, $x_1 = 1$. 该方程组有非零解 $\mathbf{v} = (1, -1, 1, 1)^t$. 故 V_A 的基是 $\mathbf{v}$. 写成集合的形式, 我们有 $V_A = \{\lambda \mathbf{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

推论 4.8 设 L 是以 $B=(A|\mathbf{b})\in\mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ 为增广矩阵的 n 元线性方程组. 如果 L 相容, 则

$$\dim(\mathrm{sol}(L))+\mathrm{rank}(A)=n.$$

证明. 设 H 是以 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 为系数矩阵的 n 元齐次线性方程组. 设 $\mathbf{v}\in\mathrm{sol}(L)$. 根据第二章第一讲例 1.22,

$$\mathrm{sol}(L)=\mathbf{v}+\mathrm{sol}(H).$$

于是, $\dim(\mathrm{sol}(L))=\dim(\mathrm{sol}(H))$. 再根据定理 4.6,

$$n=\dim(\mathrm{sol}(H))+\mathrm{rank}(A)=\dim(\mathrm{sol}(L))+\mathrm{rank}(A).\qquad\square$$

例 4.9 确定下列线性方程组 L

$$\begin{cases} x_1-x_2-x_3-x_4+x_5 & = & 1\\ x_1+x_2-x_3+x_4+x_5 & = & 3\\ 3x_1-x_2-3x_3-x_4+3x_5 & = & 5\end{cases}$$

的解流形.

解. 该方程组的增广矩阵

$$B=(A|\mathbf{b})=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1&1&1\\1&1&-1&1&1&3\\3&-1&-3&-1&3&5\end{pmatrix}.$$

通过初等行变换得

$$B\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1&1&1\\0&2&0&2&0&2\\0&2&0&2&0&2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1&1&1\\0&2&0&2&0&2\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

于是, $\mathrm{rank}(B) = \mathrm{rank}(A) = 2$. 根据定理 *4.1*, L 相容. 根据定理 *4.6*, $\dim(\mathrm{sol}(L)) = 5 - 2 = 3$. 由高斯消去可知, 给定方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_2 + 2x_4 = 2 \end{cases} \text{等价于} \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 + x_3 + x_4 - x_5 \\ x_2 = 1 - x_4. \end{cases}$$

令 $x_3 = x_4 = x_5 = 0$. 我们得到 $\mathbf{v} = (2, 1, 0, 0, 0)^t$ 是 L 的一个*(特)*解.

再由对系数矩阵的高斯消去法可知, 以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组 H 等价于

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{等价于} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = x_3 + x_4 - x_5 \\ x_2 = -x_4. \end{cases}$$

分别令 $x_3 = 1, x_4 = x_5 = 0$; $x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0$; $x_3 = x_4 = 0, x_5 = 1$. 我们得到 H 的三个线性无关的解:

$$\mathbf{w}_1 = (1, 0, 1, 0, 0)^t, \mathbf{w}_2 = (0, -1, 0, 1, 0)^t, \mathbf{w}_3 = (-1, 0, 0, 0, 1)^t.$$

故 $\mathrm{sol}(L) = \mathbf{v} + \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \rangle$.

5 坐标空间之间的线性映射

5.1 定义和（与基底无关的）性质

定义 5.1 设 $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是映射. 如果对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\underbrace{\phi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \phi(\mathbf{x}) + \phi(\mathbf{y})}_{\text{保持加法}} \quad \text{和} \quad \underbrace{\phi(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\phi(\mathbf{x})}_{\text{保持数乘}},$$

则称 ϕ 是线性映射.

例 5.2 设

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \mathbf{x} & \mapsto & \mathbf{0}_m \end{array} \quad \text{和} \quad \begin{array}{rccc} \psi: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \mathbf{x} & \mapsto & \mathbf{x} \end{array}$$

是线性映射. 称 ϕ 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的零映射, ψ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的恒同映射.

命题 5.3 设 $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. 则下列结论等价:

(i) ϕ 线性,

(ii) 对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\underbrace{\phi(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\phi(\mathbf{x}) + \beta\phi(\mathbf{y})}_{\text{保持线性运算}}.$$

(iii) 对任意 $k \in \mathbb{Z}^+$, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$,

$$\underbrace{\phi(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k) = \alpha_1\phi(\mathbf{x}_1) + \cdots + \alpha_k\phi(\mathbf{x}_k)}_{\text{保持线性组合}}.$$

证明. (i) $\Longrightarrow$ (ii) 设 ϕ 是线性的. 则

$$\phi(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \phi(\alpha\mathbf{x}) + \phi(\beta\mathbf{y}) = \alpha\phi(\mathbf{x}) + \beta\phi(\mathbf{y}).$$

故 ϕ 保持线性运算. 反之, 取 $\alpha = \beta = 1$ 得到 ϕ 保持加法, 取 $\beta = 0$ 得到 ϕ 保持数乘.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) 对 k 归纳. 当 $k = 1$ 时,

$$\phi(\alpha_1\mathbf{x}_1) = \phi(\alpha_1\mathbf{x}_1 + 0\mathbf{x}_1) = \alpha_1\phi(\mathbf{x}_1) + 0\phi(\mathbf{x}_1) = \alpha_1\phi(\mathbf{x}_1).$$

当 $k = 2$ 时, 结论是 (ii). 设 $k > 2$ 且结论对 $k - 1$ 成立. 则

$$\begin{aligned}
&\phi(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \alpha_k\mathbf{x}_k) \\
=&\phi(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_{k-1}\mathbf{x}_{k-1}) + \alpha_k\phi(\mathbf{x}_k) && [k = 2] \\
=&\alpha_1\phi(\mathbf{x}_1) + \cdots + \alpha_{k-1}\phi(\mathbf{x}_{k-1}) + \alpha_k\phi(\mathbf{x}_k) && [\text{归纳假设}].
\end{aligned}$$

(iii) $\Longrightarrow$ (i) 令 $k = 2$ 和 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ 可知, ϕ 保持加法. 令 $k = 1$ 可知, ϕ 保持数乘. □

例 5.4 设 $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 线性. 则 $\phi(\mathbf{0}_n) = \mathbf{0}_m$.

证明. 计算

$$\phi(\mathbf{0}_n) = \phi(\mathbf{0}_n + \mathbf{0}_n) = \phi(\mathbf{0}_n) + \phi(\mathbf{0}_n) \Longrightarrow \phi(\mathbf{0}_n) = \mathbf{0}_m. \quad \square$$

例 5.5 设 $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} \psi_\lambda: \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} & \mapsto & \lambda \mathbf{x}. \end{array}$$

是线性的. 称之为数乘映射. 当 $\lambda=0$ 时, ψ_λ 是零映射. 当 $\lambda=1$ 时, ψ_λ 是恒同映射.

例 5.6 设 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.

$$\begin{array}{rcl} T_{\mathbf{v}}: \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} & \mapsto & \mathbf{v}+\mathbf{x}. \end{array}$$

不是线性的. 这是因为 $T_{\mathbf{v}}(\mathbf{0}) = \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

命题 5.7 设 $\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 线性. 如果 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ 线性相关, 则 $\phi(\mathbf{v}_1), \ldots, \phi(\mathbf{v}_k)$ 也线性相关.

证明. 设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, 不全为零, 使得 $\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}_n$. 根据上一章命题 5.3,

$$\mathbf{0}_m = \phi(\mathbf{0}_n) = \phi\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \phi(\mathbf{v}_i).$$

因为 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, 不全为零, 所以 $\phi(\mathbf{v}_1), \ldots, \phi(\mathbf{v}_k)$ 线性相关. □