

第二章 矩阵

注解 6.7 设 $A = (a_{i,k})_{m \times s} \in \mathbb{R}^{m \times s}$, $B = (b_{k,j})_{s \times n} \in \mathbb{R}^{s \times n}$.
乘积 AB 有不同的等价表述方式如下:

(i) (映射版) 设 $\phi_B: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^s$ 和 $\phi_A: \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 分别是 A 和 B 对应的线性映射. 由上述计算可知 AB 是线性映射 $\phi_A \circ \phi_B$ 对应的矩阵. 即

$$\phi_A \circ \phi_B = \phi_{AB}.$$

(ii) (列向量版) 设

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_s \end{pmatrix} \implies A\mathbf{v} = \sum_{k=1}^s v_k \vec{A}^{(k)} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^s a_{1,k} v_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^s a_{m,k} v_k \end{pmatrix}.$$

故

$$AB = \left(A\vec{B}^{(1)}, \dots, A\vec{B}^{(n)} \right).$$

验证如下: 等式右侧第 i 行第 j 列处的元素是 $A\vec{B}^{(j)}$ 中的第 i 个元素. 即 $\sum_{k=1}^s a_{i,k} b_{k,j}$.

(iii) (行向量版) 设

$$\begin{aligned} \mathbf{w} = (w_1, \dots, w_s) \implies \mathbf{w}B &= \sum_{k=1}^s w_k \vec{B}_k \\ &= \left(\sum_{k=1}^s w_k b_{k,1}, \dots, \sum_{k=1}^s w_k b_{k,n} \right). \end{aligned}$$

故

$$AB = \begin{pmatrix} \vec{A}_1 B \\ \vdots \\ \vec{A}_m B \end{pmatrix}.$$

验证如下：等式右侧第 i 行第 j 列处的元素是 $\vec{A}_i \vec{B}$ 中的第 j 个元素. 即 $\sum_{k=1}^s a_{i,k} b_{k,j}$.

(iv) (行-列向量版) 设：

$$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k), \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_s \end{pmatrix} \implies \mathbf{u}\mathbf{v} = u_1 v_1 + \dots + u_s v_s.$$

故

$$AB = \begin{pmatrix} \vec{A}_1 \vec{B}^{(1)} & \dots & \vec{A}_1 \vec{B}^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{A}_m \vec{B}^{(1)} & \dots & \vec{A}_m \vec{B}^{(n)} \end{pmatrix} = \left(\vec{A}_i \vec{B}^{(j)} \right)_{m \times n}.$$

验证如下：等式右侧第 i 行第 j 列处的元素是

$$\vec{A}_i \vec{B}^{(j)} = (a_{i,1}, \dots, a_{i,s}) \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ \vdots \\ b_{s,j} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^s a_{i,k} b_{k,j}.$$

例 6.8 设 $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 证明:

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)A = \begin{pmatrix} \lambda_1 \vec{A}_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \vec{A}_m \end{pmatrix}$$

和

$$A\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\lambda_1 \vec{A}^{(1)}, \dots, \lambda_n \vec{A}^{(n)}).$$

证明. 矩阵 $B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)A$ 中第 i 行第 j 列处的元素等于

$$(0, \dots, 0, \lambda_i, 0, \dots, 0) \vec{A}^{(j)} = \lambda_i a_{i,j} \xrightarrow{j=1,2,\dots,n} \vec{B}_i = \lambda_i \vec{A}_i.$$

矩阵 $C = A\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 中第 i 行第 j 列处的元素等于

$$\vec{A}_i \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_j a_{i,j} \xrightarrow{i=1,2,\dots,m} \vec{C}^{(j)} = \lambda_j \vec{A}^{(j)}.$$

上例说明 $\text{diag}_m(\lambda)A = A\text{diag}_n(\lambda) = \lambda A$. 特别地,

$$O_m A = A O_n = O_{m \times n} \quad \text{和} \quad E_m A = A E_n = A.$$

矩阵的乘法大大化简了我们对线性方程组和线性映

射的表示. 设 $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 则齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n = 0 \end{cases}$$

除了可以写为向量形式 $\sum_{j=1}^n x_j \vec{A}^{(j)} = \mathbf{0}_m$ 外, 还可以写为乘法形式

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}_m,$$

其中 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^t$. 类似地, 设 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. 则以 $(A|\mathbf{b})$ 为增广矩阵的线性方程组, 除了可以写为向量形式 $\sum_{j=1}^n x_j \vec{A}^{(j)} = \mathbf{b}$ 外, 还可以写为乘法形式

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

设 $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射, 它在标准基下的矩阵是 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 则对任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

6.3 矩阵运算的规律

加法. 设 $A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

(A1) 交换律: $A + B = B + A$.

(A2) 结合律: $(A + B) + C = A + (B + C)$.

(A3) 加法单位元: $A + O_{m \times n} = A$.

(A4) 加法逆元: $A + (-A) = O_{m \times n}$.

数乘. 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 和 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

(S1) 结合律: $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.

(S2) 数乘单位元: $1A = A$.

以上规律由实数的运算规律可直接推出.

命题 6.9 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times s}$, $B \in \mathbb{R}^{s \times k}$, $C \in \mathbb{R}^{k \times n}$. 则

$$(AB)C = A(BC).$$

证明. 考虑线性映射:

$$\phi_A : \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad \phi_B : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^s, \quad \phi_C : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k.$$

我们有交换图:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\phi_C} & \mathbb{R}^k \\ & \searrow \phi_B \circ \phi_C = \phi_{BC} & \downarrow \phi_B \\ & & \mathbb{R}^s \xrightarrow{\phi_A} \mathbb{R}^m. \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{红色箭头: } \phi_A \circ \phi_B = \phi_{AB} \\ \text{蓝色箭头: } \phi_B \circ \phi_C = \phi_{BC} \end{array}$$

根据第一章第二讲定理 4.11, $(\phi_A \circ \phi_B) \circ \phi_C = \phi_A \circ (\phi_B \circ \phi_C)$.

由矩阵乘法的定义可知,

$$(\phi_A \circ \phi_B) \circ \phi_C = \phi_{AB} \circ \phi_C = \phi_{(AB)C}$$

和

$$\phi_A \circ (\phi_B \circ \phi_C) = \phi_A \circ \phi_{BC} = \phi_{A(BC)}.$$

于是, $\phi_{(AB)C} = \phi_{A(BC)}$. 根据上一讲定理 6.5, $(AB)C = A(BC)$.

□

乘法. 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times s}$, $B \in \mathbb{R}^{s \times k}$, $C \in \mathbb{R}^{k \times n}$.

(M1) 结合律: $(AB)C = A(BC)$.

(M2) 数乘单位元: $E_m A = A E_s = A$.

设 A 是 n 阶方阵. $A^0 := E$. 对 $k \in \mathbb{Z}^+$, $A^k := \underbrace{A \cdots A}_k$.

例 6.10 计算 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^k$, 其中 k 是任意正整数.

解. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. 则

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

断言. 如果 $k = 2m$, 其中 $m \in \mathbb{Z}^+$, 则 $A^k = E$.

断言的证明. 当 $m = 1$ 时, 断言成立. 设 $m > 1$ 且 $m - 1$ 时, 断言成立. 则

$$A^{2m} = A^{2(m-1)} A^2 = E E = E.$$

故断言成立.

当 $k = 2m + 1$. $A^k = A^{2m}A = EA = A$, 其中 $m \in \mathbb{N}$.

综上所述

$$A^k = \begin{cases} A & \text{如果 } k \text{ 是奇数,} \\ E & \text{如果 } k \text{ 是偶数.} \end{cases}$$

加法与数乘的分配律. 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 和 $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

$$(AS1) \quad (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A.$$

$$(AS2) \quad \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B.$$

数乘与乘法的分配律. 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times s}$, $B \in \mathbb{R}^{s \times n}$.

$$(SM) \quad (\alpha A)(\beta B) = (\alpha\beta)AB.$$

加法与乘法的分配律. 设 $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{k, m}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$.

$$(AM1) \quad \text{左分配律: } C(A + B) = CA + CB.$$

$$(AM2) \quad \text{右分配律: } (A + B)D = AD + BD.$$

我们来验证 (AM1). 其它验证或者是直接的或者与下述验证类似.

设 $A = (a_{i,j})_{m \times n}$, $B = (b_{i,j})_{m \times n}$, $C = (c_{p,i})_{p \times m}$ 和 $G = C(A + B) = (g_{p,j})_{k \times n}$. 则

$$g_{p,j} = \sum_{i=1}^m c_{p,i}(a_{i,j} + b_{i,j}) = \underbrace{\sum_{i=1}^m c_{p,i}a_{i,j}}_{CA \text{ 中 } i \text{ 行 } j \text{ 列处元素}} + \underbrace{\sum_{i=1}^m c_{p,i}b_{i,j}}_{CB \text{ 中 } i \text{ 行 } j \text{ 列处元素}}.$$

因为 $p = 1, \dots, m$ 和 $j = 1, \dots, n$, 所以 $G = CA + CB$.

转置的计算规律

(AT) 设 $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 则 $(A + B)^t = A^t + B^t$.

(ST) 设 $\alpha \in \mathbb{R}$ 和 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 则 $(\alpha A)^t = \alpha A^t$

(MT) 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times s}, B \in \mathbb{R}^{s \times n}$. 则 $(AB)^t = B^t A^t$.

规律 (AT) 和 (ST) 可直接验证, (MT) 验证如下:

设 $A = (a_{i,k})_{m \times s}$, $B = (b_{k,j})_{s \times n}$, $C = (c_{i,j})_{m \times n} = AB$.
再设 $A^t = (a'_{k,i})_{s \times m}$ 和 $B^t = (b'_{j,k})_{n \times s}$. 则 $a'_{k,i} = a_{i,k}$ 和 $b'_{j,k} = b_{k,j}$. 令 $D = (d_{j,i})_{n \times m} = B^t A^t$. 我们计算

$$d_{j,i} = \sum_{k=1}^s b'_{j,k} a'_{k,i} = \sum_{k=1}^s a_{i,k} b_{k,j} = c_{i,j}.$$

故 $C^t = D$. $\square$

最后, 我们来看矩阵乘积对秩的影响.

命题 6.11 设 $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 则 $\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$.

证明. 由加法的定义可知:

$$A + B = \left(\vec{A}^{(1)} + \vec{B}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(n)} + \vec{B}^{(n)} \right).$$

故 $V_c(A+B) \subset V_c(A) + V_c(B)$. 于是, 根据维数的性质(命题 2.14 和 2.15) 可知

$$\dim V_c(A+B) \leq \dim (V_c(A) + V_c(B)) \leq \dim(V_c(A)) + \dim(V_c(B)).$$

由此可知, $\text{rank}(A+B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$. $\square$

定理 6.12 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times s}, B \in \mathbb{R}^{s \times n}$. 则

$$(i) \text{rank}(AB) \leq \min(\text{rank}(A), \text{rank}(B));$$

$$(ii) \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - s \leq \text{rank}(AB) \quad (\text{Sylvester 不等式}).$$

证明. 考虑线性映射 $\phi_A : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^m$ 和 $\phi_B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$. 我们有下列交换图:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\phi_B} & \mathbb{R}^s \\ & \searrow \phi_{AB} = \phi_A \circ \phi_B & \downarrow \phi_A \\ & & \mathbb{R}^m. \end{array}$$

(i) 直接计算得:

$$\begin{aligned} \text{rank}(AB) &= \dim(\text{im}(\phi_{AB})) \quad (\text{命题 6.6 (i)}) \\ &= \dim(\phi_A(\text{im}(\phi_B))) \quad (\text{im}(\phi_{AB}) = \phi_A(\text{im}(\phi_B))) \\ &\leq \dim(\text{im}(\phi_B)) \quad (\text{命题 5.13 (i)}) \\ &= \text{rank}(B) \quad (\text{命题 6.6 (i)}). \end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(AB) &= \dim(\phi_A(\operatorname{im}(\phi_B))) \quad (\text{见上面的计算}) \\ &\leq \dim(\phi_A(\mathbb{R}^s)) \quad (\operatorname{im}(\phi_B) \subset \mathbb{R}^s) \\ &= \dim(\operatorname{im}(\phi_A)) \quad (\phi_A(\mathbb{R}^s) = \operatorname{im}(\phi_A)) \\ &= \operatorname{rank}(A) \quad (\text{命题 6.6 (i)}).\end{aligned}$$

(i) 成立.

(ii) 设 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d$ 是 $\ker(\phi_A) \cap \operatorname{im}(\phi_B)$ 的一组基, $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d$ 是 $\operatorname{im}(\phi_B)$ 的一组基. 则 $\operatorname{rank}(B) = d + k$.

断言. $\operatorname{rank}(AB) \geq k$.

断言的证明. 设 $\alpha_1 \phi_A(\mathbf{u}_1) + \dots + \alpha_k \phi_A(\mathbf{u}_k) = \mathbf{0}_m$, 其中 $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. 则 $\phi_A(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_m$, 其中 $\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{u}_k$. 故 $\mathbf{u} \in \operatorname{im}(\phi_B) \cap \ker(\phi_A)$. 于是, $\mathbf{u} \in \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d \rangle$. 因为 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d$ 线性无关, 所以 $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$. 于是, $\phi_A(\mathbf{u}_1), \dots, \phi_A(\mathbf{u}_k)$ 是 $\operatorname{im}(\phi_{AB})$ 中的一组线性无关向量. 故 $\dim(\operatorname{im}(\phi_{AB})) \geq k$. 从而, $\operatorname{rank}(AB) \geq k$. 断言成立.

由对偶定理(线性映射版)可知,

$$\operatorname{rank}(A) = s - \dim(\ker(\phi_A)) \leq s - d.$$

于是

$$\operatorname{rank}(B) + \operatorname{rank}(A) - s \leq d + k + s - d - s = k.$$

根据上述断言, (ii) 成立. $\square$

推论 6.13 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, B 是 m 阶满秩方阵, C 是 n 阶满秩方阵. 则 $\text{rank}(A) = \text{rank}(BA) = \text{rank}(AC)$.

证明. 由上述定理的两个不等式可知

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) - m \leq \text{rank}(BA) \leq \min(\text{rank}(B), \text{rank}(A)).$$

因为 $\text{rank}(B) = m$, 所以 $\text{rank}(A) \leq \text{rank}(BA) \leq \text{rank}(A)$.
故 $\text{rank}(BA) = \text{rank}(A)$. 另一个等式可以类似地证明. $\square$

7 方阵

实数上所有方阵的集合记为 $M_n(\mathbb{R})$.

7.1 $M_n(\mathbb{R})$ 上的运算

对于任意 $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 我们有

$$(A1) \quad A + B = B + A;$$

$$(A2) \quad (A + B) + C = A + (B + C);$$

$$(A3) \quad A + O = A, \text{ 其中 } O \text{ 是 } n \text{ 阶零矩阵};$$

$$(A4) \quad A + (-A) = O.$$

$$(M1) \quad (AB)C = A(BC);$$

(M2) $AE = EA = A$, 其中 E 是 n 阶单位矩阵.

(S1) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$;

(S2) $1A = A$.

(AM) $A(B + C) = AB + AC$; $(A + B)C = AC + BC$.

(AS) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$; $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.

(MS) $(\lambda A)(\mu B) = \lambda(A(\mu B)) = (\lambda\mu)(AB)$.

我们把 $M_n(\mathbb{R})$ 称为 $\mathbb{R}$ 上的 n 阶矩阵代数.

记号. 设 $k \in \mathbb{Z}^+$, $A \in M_n(\mathbb{R})$. 根据乘法结合律, 我们定义:

$$A^k := \underbrace{A \cdots A}_k.$$

此外 $A^0 := E$. 可直接验证 $A^k A^\ell = A^{k+\ell}$ 和 $A^{k\ell} = (A^k)^\ell$.

例 7.1 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. 展开 $(A+B)^2$ 和 $(A+B)(A-B)$.

解. $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$.

$(A+B)(A-B) = A^2 + BA - AB - B^2$.

只有当 $AB = BA$ 时, 我们才有

$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ 和 $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

定义 7.2 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$. 如果 $A^t = A$, 则称 A 是对称矩阵. 如果 $A^t = -A$, 则称 A 是斜对称矩阵. 如果存在 $k \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $A^k = O$. 则称 A 是幂零矩阵. 如果 $A^2 = A$, 则称 A 是幂等矩阵.

注解 7.3 设 $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$. 则 A 对称当且仅当 $a_{i,j} = a_{j,i}$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. 而 A 斜对称当且仅当 $a_{i,i} = 0$ 且 $a_{i,j} = -a_{j,i}$, 其中 $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ 且 $i \neq j$. 我们来验证关于斜对称的必要充分条件如下

$$A = -A^t \iff A + A^t = O$$

$$\iff a_{i,j} + a_{j,i} = 0, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$\iff 2a_{i,i} = 0, a_{i,j} + a_{j,i} = 0, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j$$

$$\iff a_{i,i} = 0, a_{i,j} + a_{j,i} = 0, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j \quad (2 \neq 0).$$

7.2 交换不变量与中心元

由第二章第四讲例 6.19 可知, 对 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $\text{rank}(AB)$ 可能不等于 $\text{rank}(BA)$. 换言之, 秩关于矩阵乘法不是交换不变量.

定义 7.4 设 $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$. 我们称 $\sum_{i=1}^n a_{i,i}$ 是 A 的迹 (*trace*). 记为 $\text{tr}(A)$.

可直接验证: 对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$,

$$\text{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \text{tr}(A) + \beta \text{tr}(B).$$

命题 7.5 设 $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$. 则

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

证明. 设 $C = (c_{ij}) = AB$ 和 $D = (d_{i,j}) = BA$. 则

$$c_{i,i} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,i} \quad \text{和} \quad d_{i,i} = \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,i}.$$

于是,

$$\operatorname{tr}(C) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,i} \quad \text{和} \quad \operatorname{tr}(D) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,i}.$$

故 $\operatorname{tr}(C) = \operatorname{tr}(D)$. $\square$

例 7.6 证明: 对任意 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $AB - BA \neq E$.

证明. 我们计算 $\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = 0$ (命题 7.5). 但 $\operatorname{tr}(E) = n > 0$. 故 $AB - BA \neq E$. $\square$

定义 7.7 设 $C \in M_n(\mathbb{R})$. 如果对任意 $A \in M_n(\mathbb{R})$, 我们有 $AC = CA$. 则称 C 是中心元.

定理 7.8 设 $C \in M_n(\mathbb{R})$. 则 C 是中心元当且仅当 C 是数乘矩阵.

为了证明每个中心元是数乘矩阵, 我们需要下述引理.

引理 7.9 (搬运工引理) 对任意 $i, j \in \{1, \dots, k\}$, 设 $E_{i,j}^{(k)}$ 是在 i 行 j 列处的元素等于 1, 而其它元素都等于零的 k 阶方阵. 则对于 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

$$E_{i,j}^{(m)} A = \begin{pmatrix} O_{(i-1) \times n} \\ \vec{A}_j \\ O_{(m-i) \times n} \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad AE_{i,j}^{(n)} = (O_{m \times (j-1)}, \vec{A}^{(i)}, O_{m \times (n-j)}).$$

证明. 根据列向量乘法公式, $AE_{i,j}^{(n)}$ 中除第 j 列外都是 $\mathbf{0}_n$. 而第 j 列是 $A\mathbf{e}_j = \vec{A}^{(i)}$. 故第二个等式成立. 由此可知

$$(E_{i,j}^{(m)} A)^t = A^t E_{j,i}^{(m)} = (O_{n \times (i-1)}, \vec{A}_j^t, O_{n \times (m-i)}).$$

对上式再次转置得到

$$(E_{i,j}^{(m)} A) = (O_{n \times (i-1)}, \vec{A}_j^t, O_{n \times (m-i)})^t = \begin{pmatrix} O_{(i-1) \times n} \\ \vec{A}_j \\ O_{(m-i) \times n} \end{pmatrix}.$$

第一个等式成立. $\square$

定理 7.8 的证明. 设 $C = \lambda E$. 则对任意 $A \in M_n(\mathbb{R})$, $CA = \lambda A$ 且 $AC = \lambda A$. 故 $CA = AC$.

反之, 设 $C = (c_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ 是中心元. 对任意 $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $E_{i,j}^{(n)} C = C E_{i,j}^{(n)}$. 于是

$$\begin{pmatrix} O_{(i-1) \times n} \\ \vec{C}_j \\ O_{(n-i) \times n} \end{pmatrix} = (O_{n \times (j-1)}, \vec{C}^{(i)}, O_{n \times (n-j)}).$$

比较等式两侧矩阵的第 i 行可知, 当 $k \neq j$ 时, $c_{j,k} = 0$; 当 $k = j$ 时, $c_{j,j} = c_{i,i}$. 于是, C 是数乘矩阵. $\square$

7.3 可逆元

定义 7.10 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$. 如果存在 $B \in M_n(\mathbb{R})$ 使得 $AB = BA = E$, 则称 A 是可逆矩阵. 此时, B 称为 A 的一个逆矩阵.

设 $BA = AB = E$ 且 $CA = AC = E$. 则

$$CAB = C \implies (CA)B = C \implies EB = C \implies B = C.$$

故上述定义中 B 是唯一的. 我们把 B 称为可逆矩阵的逆矩阵, 记为 A^{-1} .

定理 7.11 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$. 则 A 可逆当且仅当 A 满秩.

证明. 设 A 可逆, 则 $AA^{-1} = E$. 根据定理 6.12 (i), $\text{rank}(A) \geq \text{rank}(AA^{-1}) = \text{rank}(E) = n$. 故 $\text{rank}(A) = n$.

反之, 设 A 满秩. 则对任意 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解 (第二章第三讲推论 4.3). 设 $\mathbf{v}_j$ 是方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$ 的解, $j = 1, 2, \dots, n$. 令 $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$. 则

$$AB = (A\mathbf{v}_1, \dots, A\mathbf{v}_n) = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = E.$$

由第二章第三讲例 3.15, $\text{rank}(A^t) = n$. 由上述证明可知存在 $C \in M_n(\mathbb{R})$ 使得 $A^t C = E$. 故 $C^t A = E$ (见第二章第四讲命题 6.23). 由此得出, $C^t AB = B$. 从而,

$$C^t(AB) = C^t E = C^t = B.$$

我们得到 $BA = E$. 于是, A 可逆. $\square$

注解 7.12 上述定理也可以用线性映射证明如下: 如果 A 可逆, 则存在 $B \in M_n(\mathbb{R})$ 使得 $BA = AB = E$. 注意到 ϕ_A, ϕ_B 都是从 $\mathbb{R}^n$ 到自身的映射. 于是, $\phi_A \circ \phi_B = \phi_E$ 和 $\phi_B \circ \phi_A = \phi_E$. 因为 ϕ_E 是恒同映射, 所以 ϕ_A 是双射. 故 A 满秩. (第二章第四讲命题 6.10 (iii)).

反之, 同样的命题蕴含 ϕ_A 是双射. 由第九周作业题 4 可知, ϕ_A^{-1} 是线性映射. 故存在 $B \in M_n(\mathbb{R})$, 使得 $\phi_A^{-1} = \phi_B$. 我们得出 $\phi_A \circ \phi_B = \phi_E$ 和 $\phi_B \circ \phi_A = \phi_E$. 于是, $AB = BA = E$.

推论 7.13 矩阵 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 可逆当且仅当存在 $B \in M_n(\mathbb{R})$ 使得 $AB = E$ 或 $BA = E$.

证明. 这是因为 $AB = E$ 或 $BA = E$ 都可推出 A 满秩. $\square$

注解 7.14 上述推论也可以根据第二章第三讲推论 5.15 推出. 这是因为 $\phi_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是单射当且仅当它是满射当且仅当它是双射.

命题 7.15 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ 都可逆. 则

(i) AB 可逆且它的逆是 $B^{-1}A^{-1}$;

(ii) A^{-1} 可逆且它的逆是 $(A^{-1})^{-1} = A$;

(iii) A^t 可逆且其逆是 $(A^{-1})^t$.

证明. (i) $AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = E$. 类似可验证 $(B^{-1}A^{-1})AB = E$.

(ii) 这是因为 $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

(iii) 由第二章第四讲命题 6.23 可知,

$$A^t(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = E^t = E.$$

类似地, $(A^{-1})^t A^t = E$. $\square$

注解 7.16 上述命题中第一个结论实际上是逆映射的穿衣脱衣规则(第一章第二讲命题 4.14 (ii)), 而第二个结论对应着第一章第二讲命题 4.14 (i).

例 7.17 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$. 则线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 确定当且仅当 A 可逆. 此时它的唯一解是 $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

例 7.18 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 幂零. 证明 $E - A$ 可逆.

证明. 设 $A^k = O$, 其中 $k > 0$. 则

$$E = E - A^k = (E - A)(E + A + \cdots + A^{k-1}).$$

故 $(E - A)^{-1} = E + A + \cdots + A^{k-1}$. $\square$

例 7.19 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

证明: 对 $m \in \mathbb{Z}^+$,

$$A^m = \begin{pmatrix} f_{m-1} & f_m \\ f_m & f_{m+1} \end{pmatrix},$$

其中 $f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = 1, f_{m+1} = f_m + f_{m-1}$.

证明. $m = 1$ 时, 结论显然. 设 $m > 1$ 且 $m - 1$ 时结论成立. 则

$$\begin{aligned} A^m &= A^{m-1}A = \begin{pmatrix} f_{m-2} & f_{m-1} \\ f_{m-1} & f_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_{m-1} & f_{m-1} + f_{m-2} \\ f_m & f_m + f_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{m-1} & f_m \\ f_m & f_{m+1} \end{pmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

设

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

和

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\sqrt{5}\lambda_1 & \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

不难计算

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\frac{1}{5} \\ \sqrt{5}\lambda_1 & -\frac{\lambda_2}{5} \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad A = B^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} B.$$

验证:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\frac{1}{5} \\ \sqrt{5}\lambda_1 & -\frac{\lambda_2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\sqrt{5}\lambda_1 & \sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5}(\lambda_1 - \lambda_2) & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{5}(\lambda_1 - \lambda_2) \end{pmatrix} = E_2$$

和

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\frac{1}{5} \\ \sqrt{5}\lambda_1 & -\frac{\lambda_2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\sqrt{5}\lambda_1 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{5}\lambda_1 & -\frac{1}{5}\lambda_2 \\ \sqrt{5}\lambda_1^2 & -\frac{\lambda_2^2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\sqrt{5}\lambda_1 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{5}}{5}(\lambda_1 - \lambda_2) \\ \frac{\sqrt{5}}{5}\lambda_1\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1) & \frac{\sqrt{5}}{5}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \end{pmatrix} = A. \end{aligned}$$

注意到: 对任意 $C \in M_n(\mathbb{R})$,

$$(B^{-1}CB)^m = B^{-1}C^mB.$$

故

$$A^m = B^{-1}\text{diag}(\lambda_1^m, \lambda_2^m)B.$$

于是,

$$f_m = \left(\sqrt{5}\lambda_1^m, -\frac{1}{5}\lambda_2^m \right) \vec{B}^{(2)} = \frac{\sqrt{5}}{5}(\lambda_1^m - \lambda_2^m).$$

于是, *Fibonacci* 序列的闭形式是

$$f_m = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^m - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^m \right).$$

注意到 $f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3, \dots, f_{10} = 55$.

但 $f_{50} = 12586269025$. 渐近公式是

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{f_m}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m} = \frac{\sqrt{5}}{5} \implies f_m \sim \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m.$$

小结. *Fibonacci* 序列:

$$\underbrace{f_0 = 0, f_1 = 1, f_{m+1} = f_m + f_{m-1},}_{\text{递归公式}}$$

$$\underbrace{f_m = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m \right),}_{\text{闭形式}}$$

和

$$\underbrace{f_m \sim \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m}_{\text{渐进公式}}.$$