第二章　线性算子

10　循环子空间的应用

10.1　循环空间和循环算子

定义 10.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 如果存在 $\mathbf{v} \in V$ 使得 $V = F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}$, 则称 V 是 $\mathcal{A}$-循环的 且 $\mathcal{A}$ 是 V 上的循环算子.

命题 10.2 设 $\dim(V) = n$, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则 V 是 $\mathcal{A}$-循环的当且仅当 $\deg(\mu_{\mathcal{A}}) = n$.

证明. 设 $\deg(\mu_{\mathcal{A}}) = n$. 根据"同归于尽"向量的存在性, 存在 $\mathbf{v} \in V$ 使得 $\deg(\mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}}) = n$. 由命题 9.2 (iii),

$$\dim(F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}) = n.$$

故 $F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v} = V$. 反之, 设 $V = F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}$. 则 $\deg(\mu_{\mathcal{A},\mathbf{w}}) = n$ (由命题 9.2 (iii)). 再利用事实 $\mu_{\mathcal{A},\mathbf{w}} | \mu_{\mathcal{A}}$, 和第十周习题 5 命题 6.8 可知, $\deg(\mu_{\mathcal{A}}) = n$. □

例 10.3 设 $\mathcal{D}$ 是 $\mathbb{R}[t] < n$ 上的导数算子. 则 $\mu_{\mathcal{D}} = t^n$. 故 $\mathcal{D}$ 是循环算子.

例 10.4 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 可对角化. 证明: $\mathcal{A}$ 是循环算子当且仅当 $\mathcal{A}$ 有 n 个互不相同的特征根, 其中 $n = \dim(V)$.

证明. 设 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵是 $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. 则 $\mu_{\mathcal{A}} = \mathrm{lcm}(t-\lambda_1, \ldots, t-\lambda_n)$ *and* $\chi_{\mathcal{A}} = (t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_n)$. 于是, $\mu_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{A}}$ 当且仅当 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 两两不同. 由上述定理可知, $\mathcal{A}$ 是循环算子当且仅当 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 两两不同.

定理 10.5 设 $\dim(V) = n$, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则 V 是 $\mathcal{A}$-循环的当且仅当 $\mu_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{A}}$.

证明. 设 $\mu_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{A}}$. 则 $\deg(\mu_{\mathcal{A}}) = n$. 由上述命题可知, V 是 $\mathcal{A}$-循环的.

反之, 设 $V = F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}$. 则 $\mathbf{v}, \mathcal{A}(\mathbf{v}), \ldots, \mathcal{A}^{n-1}(\mathbf{v})$ 是 V 的一组基. 则存在 $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1} \in F$ 使得

$$\mathcal{A}^n(\mathbf{v}) = -f_{n-1}\mathcal{A}^{n-1}(\mathbf{v}) - \cdots - f_1\mathcal{A}(\mathbf{v}) - f_0\mathbf{v}.$$

则 $\mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}}(t) = t^n + f_{n-1}t^{n-1} + \cdots + f_1 t + f_0 \in F[t]$. 根据命题 6.8, $\mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}}(t) = \mu_{\mathcal{A}}(t)$. 这是因为 $\mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}}$ 的次数至多等于 n.

我们来计算 $\mathcal{A}$ 在基底 $\mathbf{v}, \mathcal{A}(\mathbf{v}), \ldots, \mathcal{A}^{n-1}(\mathbf{v})$ 下的矩阵

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{A}(\mathbf{v}), \mathcal{A}^2(\mathbf{v}), \ldots, \mathcal{A}^n(\mathbf{v})) \\
&= (\mathbf{v}, \mathcal{A}(\mathbf{v}), \ldots, \mathcal{A}^{n-1}(\mathbf{v})) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -f_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -f_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -f_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -f_{n-1} \end{pmatrix}}_{A}.
\end{aligned}$$

则 $\chi_{\mathcal{A}}(t)=\mu_{\mathcal{A}}(t)$. (见第十一周习题 6). 故 $\mu_{\mathcal{A}}=\chi_{\mathcal{A}}$. □

10.2 Hamilton-Cayley 定理

定理 10.6 *(Hamilton-Cayley 定理)* 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 则

(i) $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})=\mathcal{O}$, 即 $\mu_{\mathcal{A}}(t)|\chi_{\mathcal{A}}(t)$;

(ii) $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ 在 $F[t]$ 中的不可约因子都是 $\mu_{\mathcal{A}}(t)$ 的因子.

证明. 由循环子空间分解定理, $V=U_1\oplus\cdots\oplus U_\ell$, 其中 $U_1,\ldots,U_\ell$ 是非零的 $\mathcal{A}$-循环子空间. 特别地, $U_1,\ldots,U_\ell$ 是 $\mathcal{A}$-不变的(命题 9.2 (ii)). 令 $\mathcal{A}_i=\mathcal{A}_{U_i}$, $\mu_i=\mu_{\mathcal{A}_i}$, $\chi_i=\chi_{\mathcal{A}_i}$, $i=1,2,\ldots,\ell$. 根据定理 4.10, $\mathcal{A}$ 在某组基下的矩阵是:

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & O & \cdots & O\\ O & A_2 & \cdots & O\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ O & O & \cdots & A_\ell\end{pmatrix}.$$

且 $\mu_{\mathcal{A}}=\operatorname{lcm}(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_\ell)$. 由例 7.14, $\chi_{\mathcal{A}}=\chi_1\chi_2\cdots\chi_\ell$. 由定理 10.2, $\mu_i=\chi_i$, $i=1,2,\ldots,\ell$. 故上式可以写为

$$\chi_{\mathcal{A}}=\mu_1\mu_2\cdots\mu_\ell. \tag{1}$$

于是, $\mu_{\mathcal{A}}(t)|\chi_{\mathcal{A}}(t)$. (i) 成立.

(ii) 由 (i) 和 $\mu_{\mathcal{A}}=\operatorname{lcm}(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_\ell)$ 可得. □

注解 10.7 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\mu_{\mathcal{A}} = p_1^{m_1} \cdots p_s^{m_s}$ 是 $\mu_{\mathcal{A}}$ 在 $F[t]$ 中的不可约分解. 则 $\chi_{\mathcal{A}}$ 在 $F[t]$ 中的不可约分解是

$$\chi_{\mathcal{A}} = p_1^{n_1} \cdots p_s^{n_s},$$

其中 $m_1 \leq n_1, \ldots, m_s \leq n_s$ 且 $n_1 + \cdots + n_s = n$.

推论 10.8 *(Hamilton-Cayley 定理之矩阵版)* 设 $A \in \mathrm{M}_n(F)$. 则 *(i)* $\mu_A(t) | \chi_A(t)$; *(ii)* $\chi_A(t)$ 在 $F[t]$ 中的不可约因子都是 $\mu_A(t)$ 的因子.

例 10.9 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

计算 $B = -A^3 + 4A^2 + 5A - 2E$.

解. 设 $f(t) = -t^3 + 4t^2 + 5t - 2$. 计算得

$$\chi_A(t) = (t-1)^2(t-2) = t^3 - 4t^2 + 5t - 2.$$

由多项式带余除法得: $f(t) = -\chi_A(t) + 10t - 4$. 由 *Hamilton-Cayley* 定理, $B = 10A - 4E = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 20 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

例 10.10 设 $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 14 & -8 \end{pmatrix}$. 计算 A^{66}.

解. 计算得 $\chi_A(t) = t^2 + t$. 由 *Hamilton-Cayley* 定理,

$$A^2 = -A.$$

于是,

$$\begin{aligned} A^{66} &= (A^2)^{33} = -A^{33} = -AA^{32} = -AA^{16} \\ &= -AA^8 = -AA^4 = -AA^2 = (-A)(-A) = A^2 = -A. \end{aligned}$$

我们得到 $A^{66} = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -14 & 8 \end{pmatrix}$. □

另解. 由对角化可知, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 其中 $P = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$.

于是, $P^{-1}A^{66}P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 故 $A^{66} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -14 & 8 \end{pmatrix}$.

10.3 不可分子空间的结构

引理 10.11 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, U 是 $\mathcal{A}$-子空间. 则 U 是 $\mathcal{A}$-不可分的当且仅当下述条件都成立.

(i) U 是 $\mathcal{A}$-循环子空间;

(ii) $\mu_{\mathcal{A}_U}$ 是 $F[t]$ 中某个不可约多项式的幂次.

证明. 设 U 是 $\mathcal{A}$-不可分子空间. 则 U 是 $\mathcal{A}$-子空间. 根据定理 9.5, U 是若干 A_U-循环子空间的直和, 也是若干 $\mathcal{A}$-循

环子空间的直和. 因为 U 是 $\mathcal{A}$-不可分子空间, 所以直和项只有一个, 即 U 是 $\mathcal{A}$-循环的. 进而, $\mu_{\mathcal{A}_U}$ 是 $F[t]$ 中某个不可约多项式的幂次. 否则, 由核核分解定理可知, U 关于 $\mathcal{A}_U$ 的核核分解的直和项不止一个, 与 U 是 $\mathcal{A}$-不可分子空间矛盾.

反之, 设条件 (i) 和 (ii) 满足. 设 $\mu_{\mathcal{A}_U} = p^m$, 其中 $p \in F[t]$ 不可约, $m > 0$. 因为 U 是 $\mathcal{A}$-循环子空间, 所以 U 是 $\mathcal{A}_U$-循环空间. 由第二章第四讲引理 9.5,

$$\dim(U) = m \deg(p).$$

假设 $U = U_1 \oplus U_2$, 其中 U_1, U_2 是正维数的 $\mathcal{A}$-子空间. 则它们也是 $\mathcal{A}_U$-子空间. 则 $\mu_{\mathcal{A}_{U_1}} | p^m$ 且 $\mu_{\mathcal{A}_{U_2}} | p^m$ (命题 4.4). 但 $p^m = \operatorname{lcm}(\mu_{\mathcal{A}_{U_1}}, \mu_{\mathcal{A}_{U_2}})$ (定理 4.10). 于是, $\mu_{\mathcal{A}_{U_1}}, \mu_{\mathcal{A}_{U_2}}$ 至少有一个等于 p^m. 不妨设 $\mu_{\mathcal{A}_{U_1}} = p^m$, 根据 Hamilton-Cayley 定理, $\chi_{\mathcal{A}_{U_1}}$ 有因子 p^k, 其中 $k \geq m$. 于是,

$$\dim(U_1) \geq m \deg(p) = \dim(U).$$

矛盾. □

定理 10.12 *设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则存在 $\mathcal{A}$-不可分子空间 $W_1, \ldots, W_k$ 使得 $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ 且 W_i 是 $\mathcal{A}$-循环的, $\mu_{\mathcal{A}_{W_i}}$ 是 $F[t]$ 中某个不可约多项式的幂次, $i = 1, 2, \ldots, k$.*

证明. 结合引理 10.11 和命题 5.2 即可. □

11　$\mathbb{C}$ 上的 Jordan 标准型（存在性）

记号: 在本节中 V 是 $\mathbb{C}$ 上的 n 维线性空间.

引理 11.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则 V 是 $\mathcal{A}$-不可分的当且仅当存在 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得 $\mu_{\mathcal{A}} = (t-\lambda)^n$. 此时, $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵是

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}. \tag{2}$$

证明. 设 $\mu_{\mathcal{A}} = (t-\lambda)^n$. 则 V 是 $\mathcal{A}$-循环的 (上一讲定理 9.11, 即循环空间判别法). 由不可分子空间判别法(上一讲引理 9.13) 可知, V 是 $\mathcal{A}$-不可分的. 反之, 设 V 是 $\mathcal{A}$-不可分的. 同样的引理蕴含 $\mu_{\mathcal{A}}$ 是 $\mathbb{C}[t]$ 中某个首一的不可约多项式的幂次. 由代数学基本定理, $\mu_{\mathcal{A}}=(t-\lambda)^m$, 其中 $\lambda \in \mathbb{C}$ 且 $m \in \mathbb{Z}^+$. 该引理还蕴含 V 是 $\mathcal{A}$-循环的. 于是 $m=n$ (第二章第四讲定理 9.11).

下面我们该构造 V 的一组基使得 $\mathcal{A}$ 在该基底下的矩阵如引理所述. 为此, 设 $\mathcal{B} = \mathcal{A} - \lambda E$. 则 $\mu_{\mathcal{B}}(t) = t^n$. 故 V 是 $\mathcal{B}$-循环的 (循环空间判别法), 即存在 $\mathbf{v} \in V$, 使得

$V = F[\mathcal{B}] \cdot \mathbf{v}$. 根据上一讲命题 9.2 (iii),

$$\mathbf{v}, \mathcal{B}(\mathbf{v}), \ldots, \mathcal{B}^{n-2}(\mathbf{v}), \mathcal{B}^{n-1}\mathbf{v}$$

是 V 的一组基. 令 $\epsilon_j = \mathcal{B}^{n-j}(\mathbf{v})$, $j = 1, 2, \ldots, n$. 则 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 也是 V 的一组基.

我们先计算 $\mathcal{B}$ 在 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 下的矩阵. 注意到:

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{B}(\epsilon_1), \mathcal{B}(\epsilon_2), \ldots, \mathcal{B}(\epsilon_{n-1}), \mathcal{B}(\epsilon_n)) \\
&= (\mathbf{0}, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_{n-2}, \epsilon_{n-1}) \\
&= (\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_{n-2}, \epsilon_{n-1}) J_n(0).
\end{aligned}$$

而数乘算子在任何基底下的矩阵都是 λE. 故 $\mathcal{A}$ 在 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 下的矩阵 $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \lambda\mathcal{E}$ 下的矩阵是 $J_n(0) + \lambda E = J_n(\lambda)$. □

我们称 (2) 中的矩阵为 *关于 λ 的 n 阶 Jordan 块*.

Jordan 块的若干基本性质如下.

注解 11.2

(i) *如果 $\lambda \neq 0$, 则 $\operatorname{rank}(J_n(\lambda)) = n$. 而 $\operatorname{rank}(J_n(0)) = n-1$;*

(ii) $J_n(\lambda) = \lambda E_n + J_n(0)$;

(iii) *$J_n(\lambda)$ 的极小和特征多项式都等于 $(t-\lambda)^n$; 从而把 $J_n(\lambda)$ 看成 $\mathbb{C}^n$ 上的算子后, $\mathbb{C}^n$ 是 $J_n(\lambda)$-循环的;*

(iv) $J_n(\lambda)$ 的唯一的特征值是 λ, 而对应的特征子空间的维数等于 1, 这是因为

$$J_n(\lambda) - \lambda E_n = J_n(0),$$

其秩等于 $n-1$.

(v) $J_n(\lambda)$ 可对角化当且仅当 $n=1$.

定理 11.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & O & \cdots & O \\ O & J_{d_2}(\lambda_2) & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & J_{d_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

其中 $d_1, \ldots, d_k \in \mathbb{Z}^+$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$, 都不必两两不同.

证明. 由循环子空间分解（上一讲定理 9.3）可知

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k,$$

其中 W_i 是 d_i-维 $\mathcal{A}$-不可分子空间, $i = 1, 2, \ldots, k$. 由上一讲引理 9.13 和代数学基本定理, $\mathcal{A}_{W_i}$ 的极小多项式是 $(t-\lambda_i)^{d_i}$. 根据引理 10.1, $\mathcal{A}_{W_i}$ 在 W_i 的某组基下的矩阵是 $J_{d_i}(\lambda_i)$. 再由第二章第三讲定理 5.9, $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的

矩阵是

$$\begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & O & \cdots & O \\ O & J_{d_2}(\lambda_2) & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & J_{d_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}. \quad \square$$

例 11.4 设 $\mathcal{D} : \mathbb{C}[x]^{(n)} \longrightarrow \mathbb{C}[x]^{(n)}$ 是导数算子. 计算 $\mathcal{D}$ 的 *Jordan* 标准型.

解. 由上一讲例 *9.15*, $\mathbb{C}[x]^{(n)}$ 是 $\mathcal{D}$-不可分的. 于是, $\mathcal{D}$ 的 *Jordan* 标准型是 $J_n(0)$. 注意到

$$\mathbb{C}[x]^{(n)} = \mathbb{C}[\mathcal{D}] \cdot x^{n-1}.$$

由引理 *10.1* 可知 $\mathcal{D}$ 在基底

$$\mathcal{D}^{n-j}(x^{n-1}) = \frac{(n-1)!}{j!} x^j, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

下的矩阵是 $J_n(0)$. $\square$

推论 11.5 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. 则 A 相似于

$$J_A = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & O & \cdots & O \\ O & J_{d_2}(\lambda_2) & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & J_{d_k}(\lambda_k) \end{pmatrix},$$

其中 $d_1, \ldots, d_k \in \mathbb{Z}^+$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$, 都不必两两不同.

例 11.6 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

- $n = 1$. $(a) = J_1(a)$.

- $n = 2$. 设 $\chi_A = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)$. 如果 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 则根据第二章第四讲推论 *8.8*,

$$A \sim_s \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 \\ 0 & J_1(\lambda_2) \end{pmatrix}.$$

设 $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$. 如果 $\mu_A = t - \lambda$, 则根据可对角化判别法*(V)*可知,

$$A \sim_s \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(\lambda) & 0 \\ 0 & J_1(\lambda) \end{pmatrix}.$$

如果 $\mu_A = (t-\lambda)^2$, 则 A 对应循环算子*(*第二章第四讲定理 *9.11)*. 再根据不可分子空间判别法, F^2 是 A-不可分的. 于是

$$A \sim_s \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = J_2(\lambda).$$

- $n = 3$. 设 $\chi_A = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)(t-\lambda_3)$. 如果 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 互不相同, 则根据第二章第四讲推论 *8.8*,

$$A \sim_s \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & J_1(\lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 & J_1(\lambda_3) \end{pmatrix}.$$

设 $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$. 如果 $\mu_A = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)$, 则根据可对角化判别法 V,

$$A \sim_s \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & J_1(\lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 & J_1(\lambda_2) \end{pmatrix}.$$

如果 $\mu_A = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)^2$, 则 A 对应循环算子*(*第二章第四讲定理 *9.11)*. 再根据不可分子空间判别法, F^3 不是 A-不可分的. 故

$$A \sim_s \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & O_{1\times 2} \\ O_{2\times 1} & J_2(\lambda_2) \end{pmatrix}.$$

设 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 =: \lambda$. 如果 $\mu_A = t - \lambda$, 则根据可对角化判别法*(V)*,

$$A \sim_s \lambda E_3 = \begin{pmatrix} J_1(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & J_1(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & J_1(\lambda) \end{pmatrix}.$$

如果 $\mu_A = (t-\lambda)^2$, 则 A 对应算子不是循环的*(*第二章第四讲定理 *9.11)*. 再根据不可分子空间判别法, F^3 不是 A-不可分的. 故

$$A \sim_s \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(\lambda) & O \\ O & J_2(\lambda) \end{pmatrix}.$$

如果 $\mu_A=(t-\lambda)^3$, 则 A 对应算子是循环的*(第二章第四讲定理 9.11)*. 再根据不可分子空间判别法, F^3 是 A-不可分的,

$$A\sim_s \begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}=J_3(\lambda).$$

例 11.7 设

$$J_2(0)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}J_2(0) & O\\ O & O\end{pmatrix}_{4\times 4},\quad B=\begin{pmatrix}J_2(0) & O\\ O & J_2(0)\end{pmatrix}.$$

则 $\mu_A=\mu_B=t^2$ 且 $\chi_A=\chi_B=t^4$. 通过极小多项式和特征多项式, 我们仍无法在相似的意义下区分 A 和 B. 注意到 $\mathrm{rank}(A)\neq\mathrm{rank}(B)$. 于是, $A\not\sim_s B$.

J_A 中的矩阵称为 $\mathcal{A}$ 的一个 *Jordan* 标准型. J_A 的基本性质如下:

注解 11.8 *(i)* $\mathrm{rank}(J_A)=\sum_{i=1}^{k}\mathrm{rank}(J_{d_i}(\lambda_i))$;

(ii) J_A 的*(*也是 A 的*)*极小多项式等于

$$\mathrm{lcm}((t-\lambda_1)^{d_1},\ldots,(t-\lambda_k)^{d_k});$$

特征多项式等于

$$(t-\lambda_1)^{d_1}\cdots(t-\lambda_k)^{d_k};$$

(iii) 设 $\lambda \in \operatorname{spec}_{\mathbb{C}}(\mathcal{A})$. 则 J_A 中至少有一个关于 λ 的 *Jordan* 块.

(iv) λ 的代数重数等于 λ 在 J_A 主对角线上出现的次数; λ 的几何重数等于关于 λ 的 *Jordan* 块在 J_A 中出现的次数;

(v) λ 在极小多项式中的重数等于 J_A 中关于 λ 的 *Jordan* 块出现的最大阶数.

(vi) A 可对角化当且仅当 $d_1 = \cdots = d_k = 1$.

性质 (i) 来自 J_A 是分块对角矩阵.

性质 (ii) 成立是因为第二章第三讲定理 5.9 和第二章第三讲例 7.14.

性质 (iii) 成立是因为 $\lambda \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$.

性质 (iv) 中的第一部分可由 (i) 中特征多项式的形式直接得出. 下面来验证性质 (iv) 的第二部分. 注意到

$$J_A - \lambda E_n = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) - \lambda E_{d_1} & O & \cdots & O \\ O & J_{d_2}(\lambda_2) - \lambda E_{d_2} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & J_{d_k}(\lambda_k) - \lambda E_{d_k} \end{pmatrix}.$$

因为

$$\operatorname{rank}(J_{d_i}(\lambda_i) - \lambda E_{d_i}) = \begin{cases} d_i, & \lambda \neq \lambda_i, \\ d_i - 1, & \lambda = \lambda_i, \end{cases}$$

$i=1,2,\ldots,k$. 于是,

$$\operatorname{rank}(J_A-\lambda E_n)=n-(J_A \text{ 中关于 } \lambda \text{ 的 Jordan 块出现的次数}).$$

由此和矩阵的秩和解空间维数的关系得出 $\dim(V^\lambda)$ 等于 J_A 中关于 λ 的 Jordan 块出现的次数. 于是, (iv) 成立.

性质 (v) 来自于 (i) 中极小多项式的形式.

最后, 我们来验证性质 (vi). 如果 $d_1=\cdots=d_k=1$, 则 J_A 可对角化. 于是, A 可对角化. 反之, A 可对角化蕴含 μ_A 中每个因子的重数都等于 1 (对角化判别法 V). 由性质 (v), J_A 是对角阵.

例 11.9 设 $\alpha\in\mathbb{C}$, $A=\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&\alpha&0\\\alpha&0&\alpha\end{pmatrix}$. 计算 J_A.

解. 直接计算得 $\chi_A=(t-\alpha)^3$. 于是, α 是 A 唯一的特征根, 其代数重数等于 *3*.

$$\operatorname{rank}(A-\alpha E)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\\alpha&0&0\end{pmatrix}.$$

由此看出, 当 $\alpha\neq 0$ 时, $\operatorname{rank}(A-\alpha E)=1$. 故 α 的几何重数等于 *2*. 由基本性质 *(iv)*,

$$J_A=\begin{pmatrix}J_2(\alpha)&O\\O&J_1(\alpha)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha&1&0\\0&\alpha&0\\0&0&\alpha\end{pmatrix}.$$

当 $\alpha=0$ 时, $\operatorname{rank}(A-\alpha E)=0$. 故 α 的几何重数等于 *3*. 由基本性质 *(iv)*,

$$J_A=\begin{pmatrix} J_1(0) & 0 & 0 \\ 0 & J_1(0) & 0 \\ 0 & 0 & J_1(0) \end{pmatrix}=O_{3\times 3}. \quad \square$$

例 11.10 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 计算 J_A.

解. 直接计算得 $\chi_A=(t-2)(t-1)^2$. 于是, 2 的代数和几何重数都等于 *1*. 故 $J_1(2)$ 在 J_A 中出现一次. 注意到 1 的几何重数等于

$$3-\operatorname{rank}(A-E)=3-\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=1.$$

故 $J_2(1)$ 在 J_A 中出现一次. 由此得出

$$J_A=\begin{pmatrix} J_1(2) & O \\ O & J_2(1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

例 11.11 设 $S\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 满足 $S^2-nS=O$. 求 J_S.

解. 设 $f(t)=t(t-n)$. 则 $f(A)=O$.

情形 1: $\mu_S=t$. $S=O=J_S$.

情形 2: $\mu_S = t - n$. $S = nE_n = J_S$.
情形 3: $\mu_S = t(t-n)$. 因为 $n \neq 0$, 所以 S 可对角化(判别法V). 于是

$$J_S = \begin{pmatrix} nE_r & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

其中 $r = \operatorname{rank}(S)$.

例 11.12 设 $A \in \mathrm{M}_5(\mathbb{C})$, $\operatorname{rank}(A) = 3$, $\operatorname{rank}(A^2) = 2$, $\operatorname{rank}(A+E) = 4$ 和 $\operatorname{rank}((A+E)^2) = 3$. 求 J_A.
解. 因为 $\operatorname{rank}(A) = 3 < 5$, 所以 0 是 A 的特征根且几何重数为 2. 故 J_A 中有两个以 0 为特征根的 *Jordan* 块.

因为 $\operatorname{rank}(A+E) = 4 < 5$, 所以 -1 是 A 的特征根且几何重数为 1. 故 J_A 中有一个以 -1 为特征根的 *Jordan* 块.

下面我们来分析 J_A 中 *Jordan* 块的阶数.
情形 1. 假设出现在 J_A 中的两个以 0 为特征根的 *Jordan* 块是 $J_1(0)$ 和 $J_1(0)$. 则 $J_A = \begin{pmatrix} O_{2\times 2} & \\ & B \end{pmatrix} = P^{-1}AP$, 其中 $B \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ 和 $P \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{C})$. 则

$$\operatorname{rank}(A^2) = \operatorname{rank}(J_A^2) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} O_{2\times 2} & \\ & B^2 \end{pmatrix} = 3 \neq 2,$$

矛盾.

情形 2. 假设出现在 J_A 中的两个以 0 为特征根的 *Jordan* 块是 $J_1(0)$ 和 $J_2(0)$. 则 $J_A = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & J_2(0) & \\ & & C \end{pmatrix} = P^{-1}AP$, 其中 $C \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ 和 $P \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{C})$. 直接计算得 $\mathrm{rank}(A^2) = 2$.

情形 2.1. 如果 $C = J_2(-1)$, 则 $J_A+E = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & J_2(1) & \\ & & J_2(0) \end{pmatrix}$.

我们有 $\mathrm{rank}(J_A + E) = 4$ 和 $\mathrm{rank}((J_A + E)^2) = 3$. 因为

$$J_A + E = P^{-1}(A + E)P \Longrightarrow \mathrm{rank}((A + E)^2) = \mathrm{rank}(J_A^2).$$

故 $J_A = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & J_2(0) & \\ & & J_2(-1) \end{pmatrix}$ 满足题目要求.

情形 2.2. 如果 $C = \mathrm{diag}(-1, \alpha)$, $\alpha \neq 1$, 则

$$\mathrm{rank}((A + E)^2) = 4.$$

不满足题目要求.

情形 3. 设 $J_A = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & J_3(0) & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ 或 $J_A = \begin{pmatrix} J_2(0) & & \\ & J_2(0) & \\ & & -1 \end{pmatrix}$.

则 $\mathrm{rank}((A + E)^2) = 4$, 不满足题目要求.

综上所述, $J_A = \begin{pmatrix} J_1(0) & & \\ & J_2(0) & \\ & & J_2(-1) \end{pmatrix}$.