# 第三章　内积空间

## 1　欧式空间

约定: 在本节中 $V$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的有限维线性空间.

### 1.1　$V$ 上的内积

**定义 1.1** 设 $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 是 $V$ 上的对称双线性型满足 $f(\mathbf{x},\mathbf{x})$ 是正定的. 则称 $(V,f)$ 是一个欧式空间, $f$ 是 $V$ 上的内积.

**例 1.2** *(标准欧式空间)* 设 $V=\mathbb{R}^n$,

$$\begin{array}{rccc} f: & V\times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\mathbf{x},\mathbf{y}) & \mapsto & \mathbf{x}^t\mathbf{y}. \end{array}$$

注意到 $f(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{x}^tE\mathbf{y}$. 于是, $f$ 是 $\mathbb{R}^n$ 对称双线性型, 且 $f(\mathbf{x},\mathbf{x})=\mathbf{x}^t\mathbf{x}$ 是正定的. 故 $(V,f)$ 是欧式空间.

**例 1.3** 设 $V=\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{array}{rccc} f: & V\times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (X,Y) & \mapsto & \mathrm{tr}(X^tY). \end{array}$$

下面我们来验证 $f$ 是 $V$ 上的内积.

首先设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $A, B \in V$,

$$\begin{aligned}
f(\alpha A+\beta B, Y) &= \operatorname{tr}((\alpha A+\beta B)^t Y) && (f \text{ 的定义}) \\
&= \operatorname{tr}((\alpha A^t+\beta B^t) Y) && (\text{转置的性质}) \\
&= \operatorname{tr}(\alpha(A^t Y)+\beta(B^t Y)) && (\text{矩阵乘法分配律}) \\
&= \alpha \operatorname{tr}(A^t Y)+\beta \operatorname{tr}(B^t Y) && (\operatorname{tr} \text{ 是线性函数}) \\
&= \alpha f(A, Y)+\beta f(B, Y) && (f \text{ 的定义}).
\end{aligned}$$

于是, $f$ 关于第一个变元是线性的. 类似地可验证 $f$ 关于第二个变元也是线性的. 故 $f$ 是双线性型. 注意到

$$f(Y, X)=\operatorname{tr}(Y^t X)=\operatorname{tr}((Y^t X)^t)=\operatorname{tr}(X^t Y)=f(X, Y).$$

于是, $f$ 是对称的. 设 $X=(x_{i,j}) \neq O$. 则

$$f(X, X)=X^t X=\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{i,j}^2>0.$$

于是, $f(X, X)$ 是正定的. 由此得出 $(V, f)$ 是欧式空间.

**例 1.4** 设 $V=\mathbb{R}[x]^{(n)}$, $a, b \in \mathbb{R}$ 且 $a<b$.

$$\begin{array}{rccc}
\phi: & V \times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& (f, g) & \mapsto & \int_a^b f(x) g(x)\, dx.
\end{array}$$

下面我们来验证 $\phi$ 是 $V$ 上的内积. 首先设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $p, q \in V$.

则

$$
\begin{aligned}
\phi(\alpha p+\beta q, g) &= \int_a^b (\alpha p(x)+\beta q(x))g(x))dx \quad (\phi \text{ 的定义}) \\
&= \alpha\int_a^b p(x)g(x)dx+\beta\int_a^b q(x)g(x)dx \quad (\int_a^b \text{ 线性}) \\
&= \alpha f(p,g)+\beta f(q,g) \quad (f \text{ 的定义}).
\end{aligned}
$$

于是, $\phi$ 关于第一个变元是线性的. 类似地可验证 $\phi$ 关于第二个变元也是线性的. 故 $\phi$ 是双线性型. $\phi$ 显然是对称的. 设 $f\in R[x]^{(n)}\setminus\{0\}$. 则 $\phi(f,f)=\int_a^b f(x)^2dx>0$. 于是, $\phi(f,f)$ 是正定的. 由此得出 $(V,\phi)$ 是欧式空间.

我们把欧式空间 $V$ 上的内积记为 $(\ |\ )$. 即

$$
\begin{aligned}
(\,|\,):\ V\times V &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \\
(\mathbf{x},\mathbf{y}) &\mapsto \quad (\mathbf{x}|\mathbf{y}).
\end{aligned}
$$

利用上述符号, 内积的基本性质如下:

(i) (双线性)对任意 $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in V$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,

$$(\alpha\mathbf{x}+\beta y|\mathbf{z})=\alpha(\mathbf{x}|\mathbf{z})+\beta(\mathbf{y}|\mathbf{z}), \quad (\mathbf{x}|\alpha\mathbf{y}+\beta\mathbf{z})=\alpha(\mathbf{x}|\mathbf{y})+\beta(\mathbf{x}|\mathbf{z}).$$

(ii) (对称性)对任意 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$, $(\mathbf{x}|\mathbf{y})=(\mathbf{y}|\mathbf{x})$.

(iii) (正定性)对任意 $\mathbf{x}\in V$,

$$(\mathbf{x}|\mathbf{x})\geq 0 \quad \text{且} \quad (\mathbf{x}|\mathbf{x})=0 \iff \mathbf{x}=\mathbf{0}.$$

**定义 1.5** 设 $V$ 是欧式空间, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$. 定义

$$\mathrm{G}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m) = ((\mathbf{v}_i|\mathbf{v}_j))_{m\times m}.$$

称之为 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ 的 Gram 矩阵.

由内积的对称性可知 $\mathrm{G}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m)$ 是对称的.

**命题 1.6** 设 $V$ 是欧式空间, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}$. 令

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_m\mathbf{v}_m \text{ 和 } \mathbf{y} = \beta_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_m\mathbf{v}_m).$$

则

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)\mathrm{G}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots \\ \beta_m\end{pmatrix}.$$

*证明.* 利用内积的双线性性得出

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) &= (\sum_{i=1}^m \alpha_i\mathbf{v}_i|\sum_{j=1}^m \alpha_j\mathbf{v}_j)\\ &= \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m \alpha_i\beta_j(\mathbf{v}_i|\mathbf{v}_j) \quad \text{(双线性)}\\ &= (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)\mathrm{G}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots \\ \beta_m\end{pmatrix}. \quad \square\end{aligned}$$

**命题 1.7** 设 $V$ 是欧式空间, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$. 则 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ 线性相关当且仅当 $\operatorname{rank}(\mathrm{G}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m)) < m$.

**证明.** 设 $\operatorname{rank}(\mathrm{G}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m)) < m$. 则存在 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ 不全为零, 使得

$$\mathrm{G}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

令 $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_m \mathbf{v}_m$. 由命题 1.20 和上式可知,

$$(\mathbf{x}|\mathbf{x}) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)\mathrm{G}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = 0.$$

根据内积的正定性推出 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. 故 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ 线性相关.

反之, 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ 线性相关. 则存在 $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}$, 不全为零, 使得

$$\beta_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_m \mathbf{v}_m = \mathbf{0}.$$

令

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix} = G(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

则对 $i = 1, 2, \dots, m$,

$$
\begin{aligned}
0 = (\mathbf{v}_i|\mathbf{0}) &= (\mathbf{v}_i|\sum_{j=1}^{m}\beta_j\mathbf{v}_j) \\
&= (0, \dots, 0, \underset{\underset{i}{\uparrow}}{1}, 0, \dots, 0)G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)\begin{pmatrix}\beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m\end{pmatrix} \\
&= \gamma_i.
\end{aligned}
$$

于是, 以 $\mathrm{G}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ 为系数矩阵的齐次线性方程组有非平凡解. 故 $\mathrm{rank}(\mathrm{G}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m) < m$. $\square$

**注解 1.8** 由上述两个命题可知, $\mathrm{G}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ 是半正定的. 它是正定的当且仅当 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ 线性无关.

## 1.2 长度、距离、角度和正交

**定义 1.9** 设 $V$ 是欧式空间, $\mathbf{x} \in V$. 称 $\sqrt{(\mathbf{x}|\mathbf{x})}$ 是 $\mathbf{x}$ 的长度, 记为 $\|\mathbf{x}\|$. 再设 $\mathbf{y} \in V$. 则 $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ 称为 $\mathbf{x}$ 到 $\mathbf{y}$ 之间的距离.

由内积的正定性可知, $\|\mathbf{x}\|$ 是良定义的且 $\|\mathbf{x}\| = 0$ 当且仅当 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. 从而, $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ 等且仅当 $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \mathbf{0}$. 由双线性可知 $\|\mathbf{x}\| = \| - \mathbf{x}\|$. 从而, $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$.

**定理 1.10** 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. 则 $|(\mathbf{x}|\mathbf{y})| \le \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ *(Cauchy-Bunyakovsky 不等式)*. 特别地, $|(\mathbf{x}|\mathbf{y})| = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ 当且仅当 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 线性相关.

**证明.** 当 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 或 $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ 时定理中的结论显然成立. 设 $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ 和 $\lambda$ 是任意实数. 则 $(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}|\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) \ge 0$. 利用双线性性和对称性得

$$(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}|\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) = (\mathbf{y}|\mathbf{y})\lambda^2 + 2(\mathbf{x}|\mathbf{y})\lambda + (\mathbf{x}|\mathbf{x}) \ge 0.$$

于是, $\Delta := 4(\mathbf{x}|\mathbf{y})^2 - 4(\mathbf{y}|\mathbf{y})(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \le 0$. 由此得出

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y})^2 \le (\mathbf{x}|\mathbf{x})(\mathbf{y}|\mathbf{y}) \implies |(\mathbf{x}|\mathbf{y})| \le \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|.$$

注意到 $|(\mathbf{x}|\mathbf{y})| = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ 当且仅当 $\Delta = 0$ 当且仅当存在 $\lambda \in \mathbb{R}$ 使得

$$(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}|\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) = 0.$$

这结论等价于 $\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} = \mathbf{0}$ (内积正定性). 在 $\mathbf{y} \neq 0$ 得条件下, 上述结论等价于 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 线性相关. □

**例 1.11** 在标准欧式空间中, *Cauchy-Bunyakovsky* 不等式是对任意 $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$

$$|x_1y_1 + \cdots + x_ny_n| \le \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}.$$

在上一讲例 *1.2* 定义的矩阵欧式空间中, *Cauchy-Bunyakovsky* 不等式是对任意 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$,

$$|\mathrm{tr}(A^tB)| \le \sqrt{\mathrm{tr}(A^tA)}\sqrt{\mathrm{tr}(B^tB)}.$$

在上一讲例 *1.3* 定义的多项式欧式空间中, *Cauchy-Bunyakovsky* 不等式是对任意 $f, g \in \mathbb{R}[x]^{(n)}$,

$$|\int_a^b f(x)g(x)dx| \leq \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx}\sqrt{\int_a^b g(x)^2 dx}.$$

设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, 且存在 $\alpha \in \mathbb{R}$ 使得 $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y}$ 或 $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$. 则称 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 平行. 如果 $\alpha \geq 0$, 则称 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 同向. 如果 $\alpha \leq 0$, 则称 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 反向. 有时也称 $\mathbf{0}$ 是迷向的.

**推论 1.12** 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. 则 $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$. 等式成立等且仅当 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 同向.

**证明.** 我们计算

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= (\mathbf{x}+\mathbf{y}|\mathbf{x}+\mathbf{y}) && \text{(长度的定义)}\\
&= (\mathbf{x}|\mathbf{x}) + 2(\mathbf{x}|\mathbf{y}) + (\mathbf{y}|\mathbf{y}) && \text{(双线性和对称性)}\\
&= \|\mathbf{x}\|^2 + 2(\mathbf{x}|\mathbf{y}) + \|\mathbf{y}\|^2 && \text{(长度的定义)}\\
&\leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 && \text{(Cauchy-Bunyakovsky)}\\
&= (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2.
\end{aligned}$$

于是, $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

下面验证等式成立的充要条件. 不妨设 $\mathbf{y} \neq 0$. 由上面计算可知等式成立当且仅当 $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$. 根据定理 1.10, 此时存在 $\alpha \in \mathbb{R}$ 使得 $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y}$. 于是, $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ 等价于 $(\alpha\mathbf{y}|\mathbf{y}) = \|\alpha\mathbf{y}\|\|\mathbf{y}\|$, 即 $\alpha\|\mathbf{y}\|^2 = |\alpha|\|\mathbf{y}\|^2$. 换言之, $\alpha = |\alpha|$. 即 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 同向. □

设 $\mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$. 如果 $\|\mathbf{x}\| = 1$, 则称 $\mathbf{x}$ 是单位向量. 设 $\mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$. 则 $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ 是与 $\mathbf{v}$ 同向的单位向量, 称为 $\mathbf{v}$ 的单位化向量.

**定义 1.13** 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$. 称

$$\arccos\left(\frac{(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}\right)$$

是 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 的夹角.

根据 Cauchy-Bunyakovsky 不等式, 夹角是良定义的. 它的通常取值范围是 $[0, \pi]$.

**定义 1.14** 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. 如果 $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 0$, 则称 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 正交, 记为 $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

零向量与任何向量都正交.

**引理 1.15** 设 $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in V$, 其中 $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ 非零.

*(i)* $\mathbf{x} \perp \mathbf{x} \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

*(ii)* 如果 $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ 两两正交, 则它们线性无关.

**证明.** (i) 注意到

$$(\mathbf{x}|\mathbf{x}) = 0 \iff \|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

(ii) 因为对任意 $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ 满足 $i \neq j$, 我们有 $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = 0$, 所以 $\mathrm{G}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k) = \mathrm{diag}((\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_1), \ldots, (\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_k))$. 因为对任意 $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $(\mathbf{x}_i|\mathbf{x}_i) \neq 0$, 所以

$$\mathrm{rank}(\mathrm{G}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k)) = k.$$

根据上一讲命题 1.7, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ 线性无关. □

**例 1.16** *(勾股定理)* 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. 证明 $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ 当且仅当

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2.$$

证明. 因为 $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2(\mathbf{x}|\mathbf{y}) + \|\mathbf{y}\|^2$, 所以

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$$

当且仅当 $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 0$, 即 $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$. □

## 1.3 单位正交基

设 $\dim(V) = n$, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 $V$ 中两两正交的单位向量. 称为 $V$ 的一组单位正交基. 根据第三章第一讲引理 1.15 (ii), $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 $V$ 的一组基.

**例 1.17** 在标准欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 标准基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是一组标准正交基. 在 $\mathbb{R}^2$ 中,

$$\mathbf{u} = (\cos(\theta), \sin(\theta))^t, \quad \mathbf{v} = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$$

是一组标准正交基.

**定理 1.18** *(Gram-Schmidt 正交化)* 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$ 线性无关. 则存在两两正交的单位向量 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k$ 使得

$$\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \epsilon_1, \ldots, \epsilon_i \rangle,$$

$i = 1, 2, \ldots, k$. 特别地, $V$ 有单位正交基.

*证明.* 对 $k$ 归纳. 当 $k = 1$ 时, 取 $\epsilon_1$ 为 $\mathbf{v}_1$ 的单位化向量即可. 设存在两两正交的单位向量 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{i-1}$ 使得

$$\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1} \rangle = \langle \epsilon_1, \ldots, \epsilon_{i-1} \rangle.$$

令

$$\epsilon_i' = \mathbf{v}_i - (\mathbf{v}_i|\epsilon_1)\epsilon_1 - \cdots - (\mathbf{v}_i|\epsilon_{i-1})\epsilon_{i-1}. \tag{1}$$

我们先来验证

$$\underbrace{\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_i \rangle}_{V_i} = \underbrace{\langle \epsilon_1, \ldots, \epsilon_{i-1}, \epsilon_i' \rangle}_{W_i'}. \tag{2}$$

根据 (1), $\mathbf{v}_i \in W_i'$. 而归纳假设蕴含 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1} \in W_i'$. 故 $V_i \subset W_i'$. 反之，归纳假设蕴含 $\langle \epsilon_1, \ldots, \epsilon_{i-1} \rangle \subset V_i$, 而 (1) 蕴含 $\epsilon_i' \in \langle \epsilon_1, \ldots, \epsilon_{i-1}, \mathbf{v}_i \rangle$. 故 $\epsilon_i' \in V_i$. 由此得出 $W_i' \subset V_i$. 等式 (2) 成立. 特别地，我们有 $\dim(W_i') = i$. 故 $\epsilon_i' \neq \mathbf{0}$.

我们利用 (1) 计算得：

$$(\epsilon_i'|\epsilon_j) = (\mathbf{v}_i|\epsilon_j) - \sum_{\ell=1}^{k-1} (\mathbf{v}_k|\epsilon_\ell)(\epsilon_\ell|\epsilon_j) = (\mathbf{v}_i|\epsilon_j) - (\mathbf{v}_i|\epsilon_j) = 0.$$

故 $\epsilon_i'$ 与 $\epsilon_j$ 正交. 令 $\epsilon_i$ 是 $\epsilon_i'$ 的单位化向量. 则 $\epsilon_1,\dots,\epsilon_{i-1},\epsilon_i$ 是两两正交的单位向量. 根据 (2), $\langle \mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_i\rangle=\langle \epsilon_1,\dots,\epsilon_i\rangle$.
□

**例 1.19** 设 $\mathbb{R}^4$ 是标准欧式空间,

$$\mathbf{u}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{u}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \mathbf{u}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

计算子空间 $U=\langle \mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\rangle$ 的一组单位正交基.

解. 由 *Gram-Schmidt* 正交化得

$$\epsilon_1=\frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_1.$$

$$\epsilon_2'=\mathbf{u}_2-(\mathbf{u}_2|\epsilon_1)\epsilon_1=\mathbf{u}_2-\|\mathbf{u}_1\|^{-2}(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1=\mathbf{u}_2-\frac{1}{2}\mathbf{u}_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-1\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}.$$

$$\epsilon_2=\frac{\epsilon_2'}{\|\epsilon_2\|}=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

$$\epsilon_3' = \mathbf{u}_3 - (\mathbf{u}_3|\epsilon_1)\epsilon_1 - (\mathbf{u}_3|\epsilon_2)\epsilon_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\epsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

于是, $U$ 的一组单位正交基是 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$. $\square$

**命题 1.20** 设 $V$ 的一组单位正交基是 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ 在这组基下的坐标分别是 $(x_1, \ldots, x_n)^t$ 和 $(y_1, \ldots, y_n)^t$. 则

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

*证明.* 因为 $\mathrm{G}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = E_n$, 所以第三章第一讲命题 1.7 蕴含结论. $\square$

**命题 1.21** 设 $V$ 的一组单位正交基是 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, $\mathbf{x} \in V$. 则 $\mathbf{x}$ 在该基下的第 $i$ 个坐标分量是 $(\mathbf{x}|\mathbf{e}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

*证明.* 设 $\mathbf{x}$ 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的坐标是 $(x_1, \ldots, x_n)^t$. 则

$$(\mathbf{x}|\mathbf{e}_i) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_j \Big| \mathbf{e}_i\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j (\mathbf{e}_j|\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^{n} x_j \delta_{j,i} = x_i. \quad \square$$

**例 1.22** 设 $V$ 和 $W$ 是两个 $n$-维欧氏空间, 其中的内积分别记为 $(\,|\,)_V$ 和 $(\,|\,)_W$. 则存在线性同构 $\phi : V \longrightarrow W$ 满足对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y})_V = (\phi(\mathbf{y})|\phi(\mathbf{y}))_W.$$

证明. 设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 $V$ 的一组单位正交基, 而 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 是 $W$ 的一组单位正交基. 则存在线性映射 $\phi$ 使得

$$\phi(\mathbf{e}_i) = \epsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

(第一章第二讲定理 4.11). 进而, $\phi$ 是线性同构(第一章第二讲定理 4.12 的证明). 设 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$ 和 $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + \cdots + y_n\mathbf{e}_n$. 根据命题 1.20,

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y})_V = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n.$$

因为 $\phi(\mathbf{x}) = x_1\epsilon_1 + \cdots + x_n\epsilon_n$ 和 $\phi(\mathbf{y}) = y_1\epsilon_1 + \cdots + y_n\epsilon_n$, 所以命题 1.20 蕴含

$$(\phi(\mathbf{x})|\phi(\mathbf{y}))_W = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n.$$

我们有 $(\mathbf{x}|\mathbf{y})_V = (\phi(\mathbf{x})|\phi(\mathbf{y}))_W$. $\square$

# 2 正交投影和正交补

**定义 2.1** 设 $\mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{x} \in V$. 称

$$\left(\mathbf{x} \,\middle|\, \frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||}\right) \frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||}$$

为 $\mathbf{x}$ 在 $\mathbf{v}$ 上的投影.

**命题 2.2** 设 $\mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{y}$ 是 $\mathbf{x}$ 在 $\mathbf{v}$ 上的投影. 则 $(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \perp \mathbf{y}$.

证明*:* 设 $\mathbf{w} = \mathbf{v}/||\mathbf{v}||$. 则 $(\mathbf{w}|\mathbf{w}) = 1$ 且 $\mathbf{y} = (\mathbf{x}|\mathbf{w})\mathbf{w}$. 直接计算得:

$$(\mathbf{x}-\mathbf{y}|\mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\mathbf{y}) - (\mathbf{y}|\mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\mathbf{w})(\mathbf{x}|\mathbf{w}) - (\mathbf{x}|\mathbf{w})^2(\mathbf{w}|\mathbf{w}) = 0. \quad \square$$

记号. 设 $X, Y \subset V$. 如果对任意的 $\mathbf{x} \in X$ 和 $\mathbf{y} \in Y$ 都有 $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$. 则称 $X$ 与 $Y$ 正交. 记为 $X \perp Y$. 当 $X = \{\mathbf{x}\}$ 时, $X \perp Y$ 也记为 $\mathbf{x} \perp Y$.

**命题 2.3** 设 $U \subset V$ 是子空间, $\mathbf{x} \in V$. 则存在唯一的 $\mathbf{u} \in U$ 使得 $(\mathbf{x}-\mathbf{u}) \perp U$.

证明. 如果 $U = \{\mathbf{0}\}$, 则令 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ 即可. 否则, 设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$ 是 $U$ 的一组单位正交基. 令 $\mathbf{u} = (\mathbf{x}|\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + \cdots + (\mathbf{x}|\mathbf{e}_d)\mathbf{e}_d$. 则 $\mathbf{u} \in U$. 则 $(\mathbf{x}-\mathbf{u}|\mathbf{e}_i) = (\mathbf{x}|\mathbf{e}_i) - (\mathbf{x}|\mathbf{e}_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, d$. 因为 $\mathbf{x}-\mathbf{u}$ 与 $U$ 的一组基底中的每个元素都正交, 所以 $(\mathbf{x}-\mathbf{u}) \perp U$.

再设 $\mathbf{v} \in U$ 使得 $(\mathbf{x}-\mathbf{v}) \perp U$. 则 $(\mathbf{v}|\mathbf{e}_i) = (\mathbf{x}|\mathbf{e}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, d$. 于是, $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ (命题 1.21). $\square$

**注解 2.4** 称上述命题中的 $\mathbf{u}$ 是 $\mathbf{x}$ 在子空间 $U$ 上的正交投影. 向量 $\mathbf{x}$ 在 $\mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ 上的投影就是 $\mathbf{x}$ 在 $\langle \mathbf{v} \rangle$ 上的正交投影.

**定理 2.5** 设 $U\subset V$ 是子空间. 令 $U^{\perp}:=\{\mathbf{x}\in V \mid \mathbf{x}\perp U\}$. 则

*(i)* $U^{\perp}$ *是子空间且* $U\perp U^{\perp}$*;*

*(ii)* $V=U\oplus U^{\perp}$ *(称* $U^{\perp}$ *是* $U$ *的正交补).*

*(iii)* $(U^{\perp})^{\perp}=U$*.*

**证明.** (i) 设 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in U^{\perp}$ 和 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. 则对任意 $\mathbf{u}\in U$,

$$(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}|\mathbf{u})=\alpha(\mathbf{x}|\mathbf{u})+\beta(\mathbf{y}|\mathbf{u})=0.$$

于是, $(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y})\perp\mathbf{u}$. 我们得到 $\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}\in U^{\perp}$. 由 $U^{\perp}$ 的定义可知, $U\perp U^{\perp}$.

(ii) 设 $\mathbf{x}\in U\cap U^{\perp}$. 则 $\mathbf{x}\perp\mathbf{x}=0$. 于是, $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ (第三章引理 1.15 (i)). 我们只要证明 $V=U+U^{\perp}$ 即可. 设 $\mathbf{x}\in V$, $\mathbf{u}$ 是 $\mathbf{x}$ 在 $U$ 上的正交投影. 则 $\mathbf{x}-\mathbf{u}\in U^{\perp}$ (命题 2.2). 故 $\mathbf{x}\in U+U^{\perp}$. 从而, $V=U\oplus U^{\perp}$.

(iii) 由正交补得定义可知 $U\subset(U^{\perp})^{\perp}$. 根据 (ii),

$$V=U\oplus U^{\perp}=U^{\perp}\oplus(U^{\perp})^{\perp}.$$

于是, $\dim(U)=\dim((U^{\perp})^{\perp})$ (直和的维数公式). 根据第一章第二讲命题 4.12 (i), 我们得到 $U=(U^{\perp})^{\perp}$. □

**推论 2.6** 设 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_d$ 是 $V$ 中的单位正交向量. 则 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_d$ 可扩充为 $V$ 的一组单位正交基.

**证明.** 设 $U = \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d \rangle$. 则 $U^\perp$ 有一组单位正交基 $\mathbf{e}_{d+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$. 根据定理 2.5, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d, \mathbf{e}_{d+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 $V$ 的一组单位正交基. $\square$

**例 2.7** 设标准欧式空间 $\mathbb{R}^3$ 的标准基是 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. 则

$$\langle \mathbf{e}_1 \rangle^\perp = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle, \quad \langle \mathbf{e}_1 \rangle^{\perp\perp} = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle^\perp = \langle \mathbf{e}_1 \rangle. \quad \square$$

**例 2.8** 设 $\mathbb{R}^4$ 是标准欧式空间,

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

计算子空间 $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle^\perp$ 的一组基.

**解.** 注意到 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle^\perp$ 当且仅当 $(\mathbf{x}|\mathbf{u}_1) = (\mathbf{x}|\mathbf{u}_2) = (\mathbf{x}|\mathbf{u}_3) = \mathbf{0}$. 即

$$(\mathbf{u}_1^t, \mathbf{u}_2^t, \mathbf{u}_3^t)\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

换言之, $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle^\perp$ 是上述方程组的解空间. 直接计算该解空间的基是 $(0, 1, 0, -1)^t$. $\square$

**例 2.9** 设标准欧式空间 $\mathbb{R}^3$ 中子空间 $U$ 是方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$$

的解空间. 求 $U^\perp$ 的一组基.

**解.** 上述方程组的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

由方程组可知 $\vec{A}_1^t, \vec{A}_2^t \in U^\perp$. 因为 $\mathrm{rank}(A) + \dim(U) = 3$, 所以 $U^\perp = \langle \vec{A}_1^t, \vec{A}_2^t \rangle$. *(定理 2.5)*. 因为 $\mathrm{rank}(A) = 2$, 所以 $U^\perp$ 的一组基是 $\vec{A}_1^t, \vec{A}_2^t$. $\square$

**例 2.10** 设 $\mathbf{v} \in V$ 是单位向量. 定义

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathbf{v}}: V &\longrightarrow V \\ \mathbf{x} &\mapsto (\mathbf{x}|\mathbf{v})\mathbf{v}. \end{aligned}$$

证明*: $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ 是线性算子 (称为关于单位向量 $\mathbf{v}$ 的正交投影算子), 并确定 $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ 的所有特征根和特征子空间.*

证明. 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. 则

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathbf{v}}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) &= (\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}|\mathbf{v})\mathbf{v} = \alpha(\mathbf{x}|\mathbf{v})\mathbf{v} + \beta(\mathbf{y}|\mathbf{v})\mathbf{v} \\ &= \alpha\mathcal{P}(\mathbf{x}) + \beta\mathcal{P}(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

故 $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ 是线性算子.

设 $\mathbf{e}_1 = \mathbf{v}$. 它是单位向量. 由推论 *2.6*, $V$ 由一组单位正交基, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, 直接计算得 $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1$ 和 $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(\mathbf{e}_j) = \mathbf{0}$, $j = 2, \ldots, n$. 故 $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ 在 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下得矩阵是 $A = \mathrm{diag}(1, \underbrace{0 \ldots, 0}_{n-1})$. 故 $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ 有两个特征根 $\lambda_1 = 1$ 和 $\lambda_2 = 0$. 它们对应得特征子空间分别是

$$V^{\lambda_1} = \langle \mathbf{v} \rangle \quad 和 \quad V^{\lambda_2} = \langle \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle. \quad \square$$

**例 2.11** 设 $U \subset V$ 是子空间, $\dim(U) = d$ 且 $0 < d < n$. 定义

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{P}_U : V & \longrightarrow & & V \\ \mathbf{x} & \mapsto & \mathbf{v} & 在 \ U \ 上的正交投影. \end{array}$$

证明*:* $\mathcal{P}_U$ 是线性算子 *(*称为关于子空间 $U$ 的正交投影算子*)*, 并确定 $\mathcal{P}_U$ 的所有特征根和特征子空间.

证明. 根据定理 *2.5*, $V = U \oplus U^{\perp}$. 设 $\mathbf{y}$ 是 $\mathbf{x}$ 关于上述直和在 $U$ 上的投影. 则 $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in U^{\perp}$. 故 $\mathbf{y}$ 是 $\mathbf{x}$ 在 $U$ 上的正交投影. 于是, $\mathcal{P}_U$ 是从 $V$ 到 $U$ 关于上述直和的投射. 从而它是线性算子.

设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$ 是 $U$ 的一组单位正交基, 则 $U^{\perp}$ 有单位正交基 $\mathbf{e}_{d+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$, 且

$$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d, \mathbf{e}_{d+1}, \ldots, \mathbf{e}_n,$$

是 $V$ 的一组单位正交基. 在该基下 $\mathcal{P}_U$ 的矩阵是

$$\operatorname{diag}(\underbrace{1,\ldots,1}_{d},\underbrace{0,\ldots 0}_{n-d}).$$

故 $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ 有两个特征根 $\lambda_1 = 1$ 和 $\lambda_2 = 0$. 它们对应得特征子空间分别是 $V^{\lambda_1} = U$ 和 $V^{\lambda_2} = U^{\perp}$. $\square$