第三章　内积空间

3　正交矩阵与正交等价

设欧式空间 V 由两组单位正交基 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$, 矩阵 $P\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 满足 $(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)=(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)P$. 则对任意 $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$, 我们有

$$\delta_{i,j}=(\epsilon_i|\epsilon_j)=((\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)\vec{P}^{(i)}|(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)\vec{P}^{(j)})=(\vec{P}^{(i)})^t\vec{P}^{(j)}.$$

由此得出 $P^tP=E$, 进而 $PP^t=E$.

定义 3.1 设 $P\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. 如果 $P^t=P^{-1}$, 则称 P 是正交矩阵. 所有 n 阶正交矩阵的集合记为 $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

显然, E 是正交矩阵.

命题 3.2 集合 $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ 是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 的子群.

证明. 根据第一学期第四章第一讲命题 2.24, 只要证明对任意 $P,Q\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $PQ^{-1}\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. 我们计算

$$(PQ^{-1})^t(PQ^{-1})=(Q^{-1})^tP^tPQ^{-1}=(Q^t)^tQ^{-1}=QQ^{-1}=E.$$

于是, $(PQ^{-1})^t=(PQ^{-1})^{-1}$. □

命题 3.3 *(i)* 如果 $P\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, 则 $\det(P)=\pm1$.

(ii) $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ 当且仅当 P 的列向量是标准欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中的一组单位正交基.

(iii) $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ 当且仅当 P 的行向量是标准欧式空间 $\mathbb{R}^{1\times n}$ 中的一组单位正交基.

证明. (i) 因为 $P^tP = 1$, 所以 $\det(P^tP) = 1$. 于是,

$$\det(P^t)\det(P) = \det(P)^2 = 1.$$

故 $\det(P) = \pm 1$.

(ii) 对任意 $i, j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$(\vec{P}^i|\vec{P}^j) = \delta_{i,j} \iff (\vec{P}^i)^t\vec{P}^j = \delta_{i,j} \iff P^tP = 1.$$

(iii) 考虑矩阵 P^t 即可. □

例 3.4 证明*:* $P \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ 当且仅当存在 θ 使得

$$P = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad 或 \quad P = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

证明. 设

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

是正交矩阵. 由命题 *3.3 (ii)* 可知, $a^2 + c^2 = 1$ 可知. 我们不妨设 $a = \cos(\theta)$. 则 $c = \pm\sin(\theta)$. 由命题 *3.3 (iii)* 可

知, $a^2+b^2=1$. 于是, $b=\pm\sin(\theta)$. 同理 $c^2+d^2=1$ 得出 $d=\pm\cos(\theta)$.

情形 1. $c=\sin(\theta)$, $b=-\sin(\theta)$. 由 $ab+cd=0$ 得出 $d=\cos(\theta)$. 此时

$$P=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}.$$

情形 2. $c=\sin(\theta)$, $b=\sin(\theta)$. 由 $ab+cd=0$ 得出 $d=-\cos(\theta)$. 此时

$$P=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{pmatrix}.$$

其它情形可在上述情形中把 θ 换为 $-\theta$ 得到. $\square$

命题 3.5 设欧式空间 V 由基 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$, 矩阵 $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 满足 $(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)=(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)P$. 再设 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 是单位正交基. 则 $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$ 是单位正交基当且仅当 $P\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

证明. 设 $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$ 是单位正交基. 由引进正交矩阵的概念的推导过程可知, $P\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. 反之, 设 $P\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. 对任意 $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$,

$$(\epsilon_i|\epsilon_j)=((\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)\vec{P}^{(i)}|(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)\vec{P}^{(j)})=(\vec{P}^{(i)})^t\vec{P}^{(j)}=\delta_{i,j}.$$

故 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 是单位正交基. □

设 V 有两组单位正交基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$. 则存在唯一的 $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ 使得 $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)P$. 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 下的矩阵分别是 A 和 B. 根据第二章第一讲第 2.2 节第一段,

$$B = P^{-1}AP = P^tAP \quad (\because\ P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})).$$

定义 3.6 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 如果存在 $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ 使得 $B = P^{-1}AP$, 则称 A 与 B 正交等价(正交相似), 记为 $A \sim_o B$.

我们来验证 $\sim_o$ 是等价关系. 因为 $E \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, 所以对任意 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $A = E^{-1}AE$. 故 $A \sim_o A$. 自反性成立.

设 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 满足 $A \sim_o B$. 则存在 $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ 使得 $B = P^{-1}AP$. 于是, $A = PBP^{-1}$. 根据命题 3.2, $P^{-1} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, 我们得到 $B \sim_o A$. 对称性成立.

再设 $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 且 $A \sim_o B$ 和 $B \sim_o C$. 则存在 $P, Q \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ 使得 $B = P^{-1}AP$ 和 $C = Q^{-1}BQ$. 于是, $C = Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}A(PQ)$. 根据命题 3.2, $PQ \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. 故 $A \sim_o C$. 传递律成立. 验证完毕.

注解 3.7 符号如定义 *3.6*, 如果 $A \sim_o B$, 则 $A \sim_s B$ 且 $A \sim_c B$. 这是因为正交矩阵的逆和转置相等. 由此可得, 矩阵的相似不变量和合同不变量都是正交等价的不变量.

例 3.8 设

$$A=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}).$$

证明*: $A\sim_s B$, $A\sim_c B$ 但 $A\nsim_o B$.*

证明. 设 $P=\mathrm{diag}(2,1)$. 则 $P^{-1}AP=B$. 故 $A\sim_s B$. 设 $Q=\mathrm{diag}(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$. 则 $Q^tAQ=B$. 于是, $A\sim_c B$.

假设存在 $H\in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ 使得 $H^tAH=B$. 根据例 *3.4*, 我们有

$$H=\begin{pmatrix}\cos(\theta)&-\sin(\theta)\\ \sin(\theta)&\cos(\theta)\end{pmatrix}\quad \text{或}\quad Q=\begin{pmatrix}\cos(\theta)&\sin(\theta)\\ \sin(\theta)&-\cos(\theta)\end{pmatrix}.$$

如果 H 为前者, 则 $AH=HB$ 蕴含

$$\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\theta)&-\sin(\theta)\\ \sin(\theta)&\cos(\theta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\theta)&\sin(\theta)\\ -\sin(\theta)&\cos(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}.$$

于是, $\sin(\theta)=0$ 且 $\cos(\theta)=0$. 矛盾. 类似地可证明 Q 也不可能等于后者. □

问题. 给定 $A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$,

1. 求它在正交等价下的标准型.

2. 给定 $A,B\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 判定它们是否正交等价.

4 正规算子和正规矩阵

记号：在本节中 V 是 n 维欧式空间, 其中 $n > 0$.

4.1 伴随算子

定义 4.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 如果算子 $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$ 满足对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\mathcal{B}(\mathbf{y}))$, 则称 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的伴随算子.

命题 4.2 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则 $\mathcal{A}$ 的伴随算子存在且唯一. 如果 $\mathcal{A}$ 在 V 的单位正交基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵等于 A, 则其伴随算子在该基下的矩阵等于 A^t.

证明. 设 $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$ 使得它在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵等于 A^t. 则对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}|\mathcal{B}(\mathbf{y})) &= (x_1, \ldots, x_n)A^t(y_1, \ldots, y_n)^t \\ &= (y_1, \ldots, y_n)A(x_1, \ldots, x_n)^t \\ &= (\mathbf{y}|\mathcal{A}(\mathbf{x})) = (\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathbf{y}).\end{aligned}$$

于是, $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的伴随算子.

设 $\mathcal{C} \in \mathcal{L}(V)$ 是 $\mathcal{A}$ 的另一个伴随算子. 设 $A = (a_{i,j})$ 和 $\mathcal{C}$ 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵等于 $C = (c_{i,j})$. 则

$$a_{i,j} = (\mathcal{A}(\mathbf{e}_j)|\mathbf{e}_i) = (\mathbf{e}_j|\mathcal{C}(\mathbf{e}_i)) = c_{j,i},$$

其中, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. 故 $C = A^t$. 从而, $\mathcal{C} = \mathcal{B}$. □

根据上述命题, 我们把 $\mathcal{A}$ 的伴随算子记为 $\mathcal{A}^*$.

4.2　正规算子

定义 4.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 如果 $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$, 则称 $\mathcal{A}$ 是正规算子. 类似地, 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 如果 $AA^t = A^tA$, 则称 A 是正规矩阵.

命题 4.4 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\mathcal{A}$ 在 V 的单位正交基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵为 A. 则 $\mathcal{A}$ 正规当且仅当 A 正规.

证明. 由命题 4.2, $\mathcal{A}^*$ 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵为 A^t. 由第二章第一讲定理 2.1, $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ 和 $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵分别是 AA^t 和 A^tA. 有矩阵表示的唯一性可知 (见第二章第一讲第 1.1 节), $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$ 当且仅当 $AA^t = A^tA$. □

定义 4.5 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 如果 $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$, 则称 $\mathcal{A}$ 是对称算子. 如果 $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$, 则称 $\mathcal{A}$ 是斜对称算子.

对称和斜对称算子都是正规算子. 显然, 对称和斜对称矩阵都是正规矩阵.

命题 4.6 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\mathcal{A}$ 在 V 的单位正交基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵为 A. 则 $\mathcal{A}$ *(*斜*)*对称的当且仅当 A *(*斜*)*对称的.

证明. 由命题 4.2, A^* 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵为 A^t. 于是, $\mathcal{A}^*{=}\mathcal{A}$ 当且仅当 $A^t{=}A$; $\mathcal{A}^*{=}-\mathcal{A}$ 当且仅当 $A^t{=}-A$; □

例 4.7 证明正交矩阵是正规矩阵.

证明. 设 $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. 则 $P^tP = E = PP^t$. □

定义 4.8 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 如果对于任意 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$,

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y})=(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathcal{A}(\mathbf{y})),$$

则称 $\mathcal{A}$ 是保内*(*积*)*的.

命题 4.9 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, $\mathcal{A}$ 在 V 的单位正交基 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵为 A. 则下列断言等价

(i) $\mathcal{A}$ 保内*;*

(ii) $A\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$*;*

(iii) 对任意 $\mathbf{x}\in V$, $\|\mathbf{x}\|=\|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|$ *(*保长*);*

(iv) 对任意 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$, $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=\|\mathcal{A}(\mathbf{x})-\mathcal{A}(\mathbf{y})\|$ *(*保距*).*

证明. (i) $\Longrightarrow$ (ii). 对任意 $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$,

$$\delta_{i,j}=(\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j)=((\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)\vec{A}^{(i)}|(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)\vec{A}^{(j)})=(\vec{A}^{(i)})^t\vec{A}^{(j)}.$$

于是, $A^tA=E$. 即 $A\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). 设 $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+\cdots+x_n\mathbf{e}_n$. 我们计算

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|^2 &= (\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathcal{A}(\mathbf{x})) \\
&= ((\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}|(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}) \\
&= (x_1,\ldots,x_n)A^tA\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = (x_1,\ldots,x_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \\
&= x_1^2+\cdots+x_n^2.
\end{aligned}$$

于是, $\|\mathbf{x}\|=\|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) 对任意 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$, 我们有

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=\|\mathcal{A}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\|=\|\mathcal{A}(\mathbf{x})-\mathcal{A}(\mathbf{y})\|.$$

(iv) $\Longrightarrow$ (i) 对任意 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$, 我们有

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=\|\mathcal{A}(\mathbf{x})-\mathcal{A}(\mathbf{y})\| \Rightarrow (\mathbf{x}-\mathbf{y}|\mathbf{x}-\mathbf{y})=(\mathcal{A}(\mathbf{x})-\mathcal{A}(\mathbf{y})|\mathcal{A}(\mathbf{x})-\mathcal{A}(\mathbf{y})).$$

于是,

$$\|\mathbf{x}\|^2-2(\mathbf{x}|\mathbf{y})+\|\mathbf{y}\|^2=\|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|^2-2(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathcal{A}(\mathbf{y}))+\|\mathcal{A}(\mathbf{y})\|^2.$$

注意到 $\|\mathbf{x}\|^2=\|\mathbf{x}-\mathbf{0}\|^2=\|\mathcal{A}(\mathbf{x})-\mathcal{A}(\mathbf{0})\|=\|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|$. 同理 $\|\mathbf{y}\|=\|\mathcal{A}(\mathbf{y})\|$. 由上式可得 $(\mathbf{x}|\mathbf{y})=(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathcal{A}(\mathbf{y}))$. $\square$

注解 4.10 *因为正交矩阵是正规矩阵(见例 4.7), 所以保内算子是正规算子. 它也称为正交(保长、保距)算子.*

4.3 正规算子的不可分子空间分解

引理 4.11 设 n 阶实方阵

$$A=\begin{pmatrix} B & C \\ O_{(n-k)\times k} & D \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } B\in \mathrm{M}_k(\mathbb{R}).$$

如果 A 正规, 则 $C=O_{k\times(n-k)}$.

证明. 因为 $A^tA=AA^t$, 所以

$$\begin{pmatrix} B^t & O \\ C^t & D^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B^t & O \\ C^t & D^t \end{pmatrix}.$$

于是, $B^tB=BB^t+CC^t$. 由此得出,

$$\mathrm{tr}(B^tB)=\mathrm{tr}(BB^t+CC^t)=\mathrm{tr}(BB^t)+\mathrm{tr}(CC^t).$$

因为矩阵的迹是交换不变量, 所以 $\mathrm{tr}(BB^t)=\mathrm{tr}(B^tB)$. 故 $\mathrm{tr}(CC^t)=0$. 因为 $\mathrm{tr}(CC^t)$ 等于 C 中所有元素的平方和, 所以 $C=O_{d\times(n-d)}$. $\square$

引理 4.12 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 是正规算子, $W\subset V$ 是 $\mathcal{A}$-子空间. 则

(i) $W^{\perp}$ 是 $\mathcal{A}$-子空间;

(ii) $\mathcal{A}$ 在 W 上的限制算子 $\mathcal{A}_W$ 是正规算子.

证明. (i) 设 $n=\dim(V)$ 且 $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_k$ 是 W 的一组单位正交基. 根据第三章第二讲定理 2.2 (ii), $V=W\oplus W^{\perp}$. 于是, $\dim(W^{\perp})=n-k$. 设 $\epsilon_{k+1},\ldots,\epsilon_n$ 是 $W^{\perp}$ 的一组单位正交基. 则 $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_k,\epsilon_{k+1},\ldots,\epsilon_n$ 是 V 的一组单位正交基. 因为 W 是 $\mathcal{A}$-不变的, 所以 $\mathcal{A}$ 在 $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_k,\epsilon_{k+1},\ldots,\epsilon_n$ 下的矩阵等于

$$A=\begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix},$$

其中 $B\in \mathrm{M}_k(\mathbb{R})$. 因为 $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_k,\epsilon_{k+1},\ldots,\epsilon_n$ 是单位正交基且 $\mathcal{A}$ 是正规算子, 所以 A 正规 (第三章第二讲命题 5.4). 根据引理 4.13, $C=O_{k\times(n-k)}$. 于是,

$$(\mathcal{A}(\epsilon_{k+1}),\ldots,\mathcal{A}(\epsilon_n))=(\epsilon_{k+1},\ldots,\epsilon_n)D.$$

故 $W^{\perp}$ 也是 $\mathcal{A}$-不变的.

(ii) 由 (i) 的证明可知,

$$A=\begin{pmatrix} B & O \\ O & D \end{pmatrix}.$$

因为 $AA^t=A^tA$, 所以 $BB^t=B^tB$. 由此得出 B 是正规矩阵. 而 B 是 $\mathcal{A}_W$ 在单位正交基 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_k$ 下的矩阵. 根据第三章第二讲命题 4.4, $\mathcal{A}_W$ 正规. □

定理 4.13 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 正规, $n=\dim(V)$. 则

$$V=U_1\oplus\cdots\oplus U_s\oplus U_{2s+1}\oplus\cdots\oplus U_n,$$

其中

(i) $U_1, \ldots, U_s$ 是二维 $\mathcal{A}$-不可分子空间;

(ii) $U_{2s+1}, \ldots, U_n$ 是一维 $\mathcal{A}$-不可分子空间;

(iii) $U_1, \ldots, U_s, U_{2s+1}, \ldots, U_n$ 两两正交.

证明. 对 $\dim(V)$ 归纳. 当 $\dim(V) = 1$ 时, 设 $s = 0$, $U_1 = V$ 即可. 设 $1 \leq \dim(V) < n$ 时定理成立. 根据上一讲引理 4.11, 存在 $\mathcal{A}$-子空间 U 使得 $0 < \dim(U) \leq 2$. 如果 $\dim(U) = 1$, 则 U-是 $\mathcal{A}$-不可分的. 如果 $\dim(U) = 2$ 但 U 是 $\mathcal{A}$-可分的, 则 U 中有一维 $\mathcal{A}$ 不变子空间. 于是, 不妨设 U 是 V 中维数不超过 2 的 $\mathcal{A}$-不可分子空间.

根据引理 4.14, $V = U \oplus U^\perp$ 且 $\mathcal{A}_{U^\perp}$ 是 $U^\perp$ 上的正规算子. 根据归纳假设, $U^\perp$ 是两两正交的维数不大于 2 的 $\mathcal{A}_{U^\perp}$-不变子空间之和. 又因为 U 与 $U^\perp$ 中的任何子空间都正交, 所以定理成立. □

4.4 正规算子和正规矩阵的标准型

设 $\dim(V)$=1 且任意的 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 都是正规算子. 这是因为对 V 中的单位向量 $\mathbf{v}$, $\mathcal{A}(\mathbf{v})$=$\lambda\mathbf{v}$, 其中 λ 是某个实数.

引理 4.14 设 $\dim(V)=2$, $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 正规, 且 V 是 $\mathcal{A}$-不可分的. 则 $\mathcal{A}$ 在 V 的任意单位正交基下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix},$$

其中 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 且 $\beta\neq 0$.

证明. 设 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ 是 V 的一组单位正交基, A 是 $\mathcal{A}$ 在 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ 下的矩阵. 则 A 正规. 设

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}.$$

由 $A^tA=AA^t$ 得

$$\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}.$$

于是,

$$\begin{cases}a^2+c^2=a^2+b^2\\ ab+cd=ac+bd\\ b^2+d^2=c^2+d^2\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}c^2=b^2\\ ab+cd=ac+bd\end{cases}$$

情形 1. $b=c$. 则 $\chi_A=t^2-(a+d)t+ad-b^2$. 其判别式是 $(a-d)^2+4b^2\geq 0$. 故 $\mathcal{A}$ 有实特征根 λ. 设 $\mathbf{v}$ 是 λ 的一个特征向量. 则 $\langle\mathbf{v}\rangle$ 是 $\mathcal{A}$-子空间. 于是, $V=\langle\mathbf{v}\rangle\oplus\langle\mathbf{v}\rangle^{\perp}$. 根据引理 4.14, V 是 $\mathcal{A}$-可分的, 矛盾.

情形 *2.* $b=-c$ 且 $c\neq 0$. 则 $a=d$. 故

$$A=\begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}.$$

直接验证可得 A 是正规的. □

我们把矩阵

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

记为 $N(\alpha,\beta)$, 其中 $\beta\neq 0$.

定理 4.15 *设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 正规. 则存在 V 的一组单位正交基 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 和 $\alpha_1,\beta_1,\ldots,\alpha_s,\beta_s,\ \lambda_{2s+1},\ldots,\lambda_n\in\mathbb{R}$, 其中 $\beta_1\cdots\beta_s\neq 0$, 使得 $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵等于*

$$\begin{pmatrix} N(\alpha_1,\beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(\alpha_s,\beta_s) & & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

证明. 根据定理 4.15,

$$V=U_1\oplus\cdots\oplus U_s\oplus U_{2s+1}\oplus\cdots\oplus U_n,$$

其中

(i) $U_1, \ldots, U_s$ 是二维 $\mathcal{A}$-不可分子空间;

(ii) $U_{2s+1}, \ldots, U_n$ 是一维 $\mathcal{A}$-不可分子空间;

(iii) $U_1, \ldots, U_s, U_{2s+1}, \ldots, U_n$ 两两正交.

设 $\mathbf{e}_{2i-1}, \mathbf{e}_{2i}$ 是 U_i 的单位正交基, $i = 1, 2, \ldots, s$, $\mathbf{e}_j$ 是 U_j 中的单位向量, $j = 2s+1, \ldots, n$. 根据引理 4.16, 存在 $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $\beta_i \neq 0$, 使得正规算子 $\mathcal{A}_{U_i}$ 在 $\mathbf{e}_{2i-1}, \mathbf{e}_{2i}$ 下的矩阵是 $N(\alpha_i, \beta_i)$, $i = 1, 2, \ldots, s$. 对于一维不变子空间 U_j, 存在 $\lambda_j \in \mathbb{R}$ 使得

$$\mathcal{A}(\mathbf{e}_j) = \lambda_j \mathbf{e}_j, \quad j = 2s+1, \ldots, n.$$

因为 $U_1, \ldots, U_s, U_{2s+1}, \ldots, U_n$ 两两正交, 所以

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{2s-1}, \mathbf{e}_{2s}, \mathbf{e}_{2s+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$$

是 V 的一组单位正交基, 且 $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵如定理所述. □

推论 4.16 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 正规. 则存在 $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_s, \beta_s$,

$\lambda_{2s+1}, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, 其中 $\beta_1 \cdots \beta_s \neq 0$, 使得

$$A \sim_o B = \begin{pmatrix} N(\alpha_1, \beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(\alpha_s, \beta_s) & & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

证明. 设 $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 由公式 $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ 给出, 其中 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$. 把 $\mathbb{R}^n$ 看成标准欧式空间, 则标准基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是单位正交基且 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵等于 A. 因为 A 正规, 所以 $\mathcal{A}$ 正规 (第三章第二讲命题 4.4). 根据定理 4.17, $\mathcal{A}$ 在某组单位正交基下的矩阵是 B. 故 $A \sim_o B$. □

命题 4.17 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 正规, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{spec}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A})$ 且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$. 则 $V^{\lambda_1} \perp V^{\lambda_2}$.

证明. 设 $\mathbf{v}_2 \in V^{\lambda_2}$. 因为 V^{λ_1} 是 $\mathcal{A}$-不变的, 所以上述引理蕴含 $\left(V^{\lambda_1}\right)^{\perp}$ 也是 $\mathcal{A}$ 不变的. 因为 $V = V^{\lambda_1} \oplus \left(V^{\lambda_1}\right)^{\perp}$, 所以

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{w},$$

其中 $\mathbf{v}_1 \in V^{\lambda_1}$, $\mathbf{w} \in \left(V^{\lambda_1}\right)^{\perp}$. 把上式两侧作用 $\mathcal{A}$ 得

$$\lambda_2 \mathbf{v}_2 = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \mathcal{A}(\mathbf{w}).$$

故
$$(\lambda_2 - \lambda_1)\mathbf{v}_1 + (\lambda_2\mathbf{w} - \mathcal{A}(\mathbf{w})) = \mathbf{0}.$$
因为 $(\lambda_2\mathbf{w} - \mathcal{A}(\mathbf{w})) \in \left(V^{\lambda_1}\right)^{\perp}$, 所以 $(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$. 因为 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 所以 $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$. 于是, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{w}$. 故 $\mathbf{v}_2 \perp V^{\lambda_1}$. $\square$