第三章　内积空间

5　对称算子和对称矩阵

5.1　实对称矩阵的正交标准型

定理 5.1　*(i)* 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 对称. 则 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组单位正交基下的矩阵是 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, 其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ 不必两两不同.

(ii) 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. 则 $A \sim_o \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, 其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ 不必两两不同.

(iii) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 是 $\mathcal{A}$ (A) 的特征根. 特别地, 实对称矩阵和欧式空间上的对称算子的特征根都是实数.

证明. (i) 由上周讲义定理 4.15 可知, 则 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组单位正交基下的矩阵是

$$B = \begin{pmatrix} N(\alpha_1, \beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(\alpha_s, \beta_s) & & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_s, \beta_s, \lambda_{2s+1}, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $\beta_1 \cdots \beta_s \neq 0$. 因为 $\mathcal{A}$ 是对称算子, 所以 B 是对称矩阵(第三章第二讲命题 4.7). 设 $s > 0$. 则 $N(\alpha_1, \beta_1)$ 是对称矩阵. 由此可知, $\beta_1 = 0$. 矛盾. 故 $s = 0$.

(ii) 把 A 看成标准欧式空间中 $\mathbb{R}^n$ 上的对称算子即可.

(iii) 因为 $A \sim_o \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, 所以 $A \sim_s \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. 因为特征多项式是相似不变量(见第二章第三讲第五页), $\chi_A = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n)$. $\square$

问题.

(i) 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 对称. 求 V 的某组单位正交基使得 $\mathcal{A}$ 在下的矩阵是 $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

(ii) 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. 求 $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ 使得

$$P^{-1} A P = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

基本步骤.

1. 计算 $\mathcal{A}$ 的特征根. 设互不相同的特征根是 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$;

2. 对 $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, 求 V^{λ_i} 的一组基;

3. 对 $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, 利用 Gram-Schmidt 正交化求 V^{λ_i} 的一组单位正交基; $\mathbf{e}_{i,1}, \ldots, \mathbf{e}_{i,d_i}$

4. 根据命题 4.17 和对角化判别法II, $\mathbf{e}_{1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{1,d_1}, \ldots, \mathbf{e}_{k,1}, \ldots, \mathbf{e}_{k,d_k}$ 是 V 的一组单位正交基且在该基下 $\mathcal{A}$ 的矩阵是对角的.

对于对称矩阵, 只需把它看成标准欧式空间上的线性算子即可.

例 5.2 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SM}_4(\mathbb{R})$. 计算 $P \in \mathrm{O}_4(\mathbb{R})$ 和对角阵 B 使得 $B = P^{-1}AP$.

解. 由计算机计算得 $\chi_A(t) = (t-1)^3(t+3)$. 于是, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$. 计算 V^{λ_1} 的一组基. 已知 $\dim(V^{\lambda_1}) = 3$. 于是, $\operatorname{rank}(\lambda_1 E - A) = 1$. 我们只要考虑方程

$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

的解空间即可. 直接得出 $V^{\lambda_1} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$. 计算 V^{λ_2} 的一组基. 因为 $V^{\lambda_1} \perp V^{\lambda_2}$ 且 $\mathbb{R}^4 = V^{\lambda_1} \oplus V^{\lambda_2}$, 所

以 $V^{\lambda_2}=\left(V^{\lambda_1}\right)^{\perp}$. 由此可知, $V^{\lambda_2}=\langle\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}\rangle$. 利用 Gram-Schmidt 正交化求 V^{λ_1} 的一组单位正交基得

$$\epsilon_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)^t,\quad \epsilon_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1)^t,\quad \epsilon_3=\frac{1}{2}(1,-1,1,-1)^t.$$

利用 Gram-Schmidt 正交化求 V^{λ_2} 的一组单位正交基得: $\epsilon_4=\frac{1}{2}(1,-1,-1,1)^t$. 故 $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\ 0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\ 0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$. 我们得到 $P^tAP=\mathrm{diag}(1,1,1,-3)$. □

推论 5.3 设 $A\in\mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. 则 A 的正(负)惯性指数等于 A 中正(负)根的个数(在记重数的意义下). 特别地, A (半)正定当且仅当 A 的特征根都是正的(非负的).

证明. 由定理 5.1 (ii) 和 (iii), $A\sim_o \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. 因为 $A\sim_c \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, 所以 A 的签名与 $\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ 的签名相同. □

定理 5.4 设 $A,B\in\mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 且 A 正定. 则存在 $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得 $P^tAP=E$ 和 P^tBP 是对角阵.

证明. 因为 A 正定, 所以存在 $P_1 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得 $P_1^t A P_1 = E$ (惯性定理). 令 $C = P_1^t B P_1$. 则 C 对称. 根据第三章第三讲定理 6.1 (ii), 存在 $P_2 \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, 使得 $D = P_2^t C P_2$ 是对角阵. 令 $P = P_1 P_2$. 则 $P^t B P = P_2^t C P_2 = D$ 且

$$P^t A P = P_2^t E P_2 = P_2^t P_2 = E \; (\because \; P_2 \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})). \quad \square$$

例 5.5 设 $A, B \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$, A 正定且 B 半正定. 证明:

$$\det(A+B) \geq \det(A) + \det(B).$$

证明. 由上述定理存在 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得 $P^t A P = E$ 和 $P^t B P = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. 于是,

$$P^t (A+B) P = \mathrm{diag}(1+\alpha_1, \ldots, 1+\alpha_n).$$

两边取行列式得 $\det(P)^2 \det(A+B) = \prod_{i=1}^n (1+\alpha_i)$. 而

$$\det(P)^2 (\det(A) + \det(B)) = \det(P^t A P) + \det(P^t B P) = 1 + \prod_{i=1}^n \alpha_i.$$

因为 B 半正定, 所以 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 非负. 于是

$$\prod_{i=1}^n (1+\alpha_i) \geq 1 + \prod_{i=1}^n \alpha_i.$$

由此可知, $\det(P)^2 \det(A+B) \geq \det(P)^2 (\det(A) + \det(B))$. 故 $\det(A+B) \geq \det(A) + \det(B)$. $\square$

6　斜对称算子和斜对称矩阵

定理 6.1　*(i)* 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 斜对称. 则存在 $\beta_1,\ldots,\beta_s\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, 使得 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组单位正交基下的矩阵是

$$M=\begin{pmatrix} N(0,\beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(0,\beta_s) & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) 设 $A\in\mathrm{SSM}_n(\mathbb{R})$. 则 A 正交相似于上述形式的矩阵.

(iii) 实斜对称矩阵和欧式空间上的斜对称算子的特征根或者是纯虚数或者等于零.

证明. (i) 由定理 4.15 可知, $\mathcal{A}$ 在 V 的某组单位正交基下的矩阵是

$$B=\begin{pmatrix} N(\alpha_1,\beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(\alpha_s,\beta_s) & & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha_1,\beta_1,\ldots,\alpha_s,\beta_s$, $\lambda_{2s+1},\ldots,\lambda_n\in\mathbb{R}$, $\beta_1\cdots\beta_s\neq 0$. 因为 $\mathcal{A}$ 是斜对称算子, 所以 B 是斜对称矩阵(第三章第三讲命题 5.7). 则 $N(\alpha_i,\beta_i)$ 是斜对称矩阵. 由此可知, $\alpha_i=0$, $i=1,2,\ldots,s$. 同理, $\lambda_{2s+1}=\cdots=\lambda_n=0$.

(ii) 把 A 看成标准欧式空间中 $\mathbb{R}^n$ 上的斜对称算子.

(iii) 因为 $A\sim_o M$, 所以 $A\sim_s M$. 故 $\chi_A=\chi_M$. 故

$$\chi_M(t)=(t^2+\beta_1^2)\cdots(t^2+\beta_s^2)t^{n-2s}.$$

于是, $\mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(A)\subset\{0,\pm\beta_1\sqrt{-1},\ldots,\pm\beta_s\sqrt{-1}\}$. □

例 6.2 设 $A\in\mathrm{SSM}_n(\mathbb{R})$. 证明 $\det(E+A)\geq 1$.

证明. 根据定理 *6.1*, 存在 $P\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ 使得 $P^tAP=M$, 其中 M 由定理 *6.1* 给出. 于是,

$$P^t(E+A)P=E+M=\mathrm{diag}(N(1,\beta_1),\ldots,N(1,\beta_s),1,\ldots,1).$$

因为 $\det(P)=\pm 1$ 和 $\det(N(1,\beta_i))\geq 1$, 所以 $\det(E+A)\geq 1$.
□

7 正交算子和正交矩阵

定理 7.1 *(i)* 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 正交. 则存在 $\theta_1,\ldots,\theta_s\in(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$ 和 $\lambda_{2s+1},\ldots,\lambda_n\in\{-1,1\}$ 使得 $\mathcal{A}$ 在 V 的某

组单位正交基下的矩阵是

$$M = \begin{pmatrix} N(\cos(\theta_1), \sin(\theta_1)) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(\cos(\theta_s), \sin(\theta_s)) & & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

(ii) 设 $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. 则 A 正交相似于上述形式的矩阵 M.

(iii) 正交矩阵和正交算子的*(*复*)*特征根的复数模长都等于 *1.*

证明. (i) 由定理 4.15 可知, $\mathcal{A}$ 在 V 的某组单位正交基下的矩阵是

$$B = \begin{pmatrix} N(\alpha_1, \beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(\alpha_s, \beta_s) & & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_s, \beta_s, \lambda_{2s+1}, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $\beta_1 \cdots \beta_s \neq 0$. 因为 $\mathcal{A}$ 是正交算子, 所以 B 是正交矩阵(第三章第三讲命题 5.9). 设 $s > 0$. 则 $N(\alpha_i, \beta_i)$ 是正交矩阵且无实特征根. 故存在 $\theta_i \in (0, \pi)$ 使得 $N(\alpha_i, \beta_i) = N(\cos(\theta_i), \sin(\theta_i))$,

$i=1,2,\ldots,s$. 类似, λ_j 是一行一列的正交矩阵. 因为正交矩阵的行列式等于 ± 1, 所以 $\lambda_j \in \{-1,1\}$.

(ii) 把 A 看成标准欧式空间中 $\mathbb{R}^n$ 上的正交算子即可.

(iii) 对任意 $\theta \in (0,\pi)$, $N(\cos(\theta),\sin(\theta))$ 的特征多项式等于 $t^2-2\cos(\theta)t+1$. 其根 $\lambda=\cos(\theta)\pm\sin(\theta)\sqrt{-1}$. □

例 7.2 设 $P\in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ 且 $\det(P)=-1$. 证明: $\det(E+P)=0$.

证明. 根据定理 *7.1*, 存在正交矩阵 Q 使得 $Q^{-1}PQ=M$, 其中 M 如该定理所述. 因为 $\det(P)=-1$, 所以 $\det(M)=-1$. 于是, 存在 $j\in\{2s+1,\ldots,n\}$ 使得 $\lambda_j=-1$. 故 -1 是 M 的特征根. 于是, -1 也是 P 的特征根. 我们有 $\det(E+P)=0$.

8 欧式空间中的若干几何构造

命题 8.1 设 W 是欧式空间 V 的子空间, $\mathbf{x}\in V$, $\mathbf{y}$ 是 $\mathbf{x}$ 在 W 上的正交投影. 则对任意 $\mathbf{w}\in W$,

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}-\mathbf{w}\|.$$

证明. (几何法) 注意到 $\mathbf{x}-\mathbf{w}=(\mathbf{x}-\mathbf{y})+(\mathbf{y}-\mathbf{w})$. 由 $\mathbf{y}-\mathbf{w}\in W$ 可知, $(\mathbf{x}-\mathbf{y})\perp(\mathbf{y}-\mathbf{w})$. 再利用勾股定理得到

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{w}\|^2=\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2+\|\mathbf{y}-\mathbf{w}\|^2\ge\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2.$$

故 $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}-\mathbf{w}\|$.

(代数法) 设 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_d$ 是 W 的一组单位正交基. 则正交投影由映射

$$\begin{array}{rcc} \mathcal{P}_W: V & \longrightarrow & V \\ \mathbf{x} & \mapsto & \sum_{i=1}^d (\mathbf{x}|\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i \end{array} \tag{1}$$

给出 (见命题 2.3 的证明). 根据定理 2.5 (ii), $W^\perp$ 有一组单位正交基 $\mathbf{e}_{d+1},\ldots,\mathbf{e}_n$ 且 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_d,\mathbf{e}_{d+1},\ldots,\mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基. 设 $\mathbf{x}=\sum_{j=1}^n x_j\mathbf{e}_j$. 则 $\mathbf{y}=\mathcal{P}_W(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^d x_i\mathbf{e}_i$. 再设 $\mathbf{u}=\sum_{i=1}^d u_i\mathbf{e}_i$. 则 $||\mathbf{x}-\mathbf{y}||^2 = x_{d+1}^2+\cdots x_n^2$ 和

$$||\mathbf{x}-\mathbf{u}||^2=(x_1-u_1)^2+\cdots+(x_d-u_d)^2+x_{d+1}^2+\cdots+x_n^2.$$

故 $||\mathbf{x}-\mathbf{y}|| \ge ||\mathbf{x}-\mathbf{u}||$. $\square$

根据上述命题, 我们把 $\|\mathbf{x}-\mathcal{P}_W(\mathbf{x})\|$ 称为 $\mathbf{x}$ 到 W 的距离, 记为 $\mathrm{d}(\mathbf{x},W)$, 其中 $\mathcal{P}_W$ 由 (1) 给出.

问题. 设 $W=\langle \mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_k\rangle$ 和 $\mathbf{x}\in V$. 求 $\mathbf{x}$ 到 W 的正交投影和 $\mathrm{d}(\mathbf{x},W)$.

命题 8.2 *利用上述问题中的记号, $\mathbf{y}=y_1\mathbf{w}_1+\cdots+y_k\mathbf{w}_k$ 是 $\mathbf{x}$ 的正交投影当且仅当*

$$\mathrm{G}(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_k)(y_1,\ldots,y_k)^t=((\mathbf{x}|\mathbf{w}_1),\ldots,(\mathbf{x}|\mathbf{w}_k))^t, \tag{2}$$

其中 $\mathrm{G}(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_k)$ 是关于 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_k$ 的 Gram 矩阵.

证明. 直接推理得

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y} = \mathcal{P}_W(\mathbf{x}) &\Longrightarrow (\mathbf{x}-\mathbf{y}) \perp W \\
&\Longrightarrow (\mathbf{x}-\mathbf{y}) \perp \mathbf{w}_j, \quad j=1,\ldots,k \\
&\Longrightarrow ((\mathbf{x}-\mathbf{y})|\mathbf{w}_j) = 0, \quad j=1,\ldots,k \\
&\Longrightarrow (\mathbf{y})|\mathbf{w}_j) = (\mathbf{x}|\mathbf{w}_j), \quad j=1,\ldots,k \\
&\Longrightarrow \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{w}_i|\mathbf{w}_j) y_i = (\mathbf{x}|\mathbf{w}_j), \quad j=1,\ldots,k \\
&\Longrightarrow (2)\ \text{成立}. \quad \square
\end{aligned}
$$

设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ 和 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. 考虑线性方程组,

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \tag{3}$$

设 $\mathbf{b}$ 在 $V_c(A)$ 中的正交投影是 $\mathbf{v}{=}\alpha_1\vec{A}^{(1)} + \cdots + \alpha_n\vec{A}^{(n)}$. 则 $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^t$. 称为 (3) 的一个最小平方解.

注意到 (3) 有解当且仅当 $\mathbf{b} \in V_c(A)$. 此时 $\mathbf{v} = \mathbf{b}$. 故每个 (3) 的最小平方解都是 (3) 的解, 反之亦然. 当 A 列满秩时, (3) 的最小平方解是唯一的.

例 8.3 设 x 代表某种杂质, y 代表产品的成品率. 已知

$$y = a\,x\% + b.$$

根据下列实验数据

$x\%$	3.6	3.7	3.8	4.0	4.1	4.2
y	1.0	0.9	0.9	0.6	0.56	0.35

求 a,b.

解. a,b 满足的方程组是

$$\begin{cases} 3.6a+b=1.0 \\ 3.7a+b=0.9 \\ 3.8a+b=0.9 \\ 4.0a+b=0.6 \\ 4.1a+b=0.56 \\ 4.2a+b=0.35 \end{cases}$$

该方程组无解. 计算其最小平方解得到 $a{=}-1.05, b{=}4.81$. 故 $y=-1.05\,x\%+4.81$.

命题 8.4 设 $\mathbf{x}\in V$, W 是 V 的子空间, $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_k$ 是 W 的一组基. 则

$$\mathrm{d}(\mathbf{x},W)^2=\frac{\det(\mathrm{G}(\mathbf{x},\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_k))}{\det(\mathrm{G}(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_k))}.$$

证明. 设 $\mathbf{x}$ 在 W 中的正交投影是 $\mathbf{y}=\sum_{i=1}^k y_i\mathbf{w}_i$,

$$M=\mathrm{G}(\mathbf{x},\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_k)\quad 和 \quad N=\mathrm{G}(\mathbf{x},\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_k).$$

则 M 可逆 (命题 1.7). 直接计算:

$$
\begin{aligned}
\frac{\det(N)}{\det(M)} &= \det(M^{-1})\det(N) \\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & O \\ O & M^{-1} \end{pmatrix} \det(N) \\
&= \det(\begin{pmatrix} 1 & O \\ O & M^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathbf{x}|\mathbf{x}) & (\mathbf{x}|\mathbf{w}_1) & \dots, & (\mathbf{x}|\mathbf{w}_k) \\ (\mathbf{x}|\mathbf{w}_1) & & & \\ \vdots & & M & \\ (\mathbf{x}|\mathbf{w}_k) & & & \end{pmatrix}) \\
&= \det(\begin{pmatrix} (\mathbf{x}|\mathbf{x}) & (\mathbf{x}|\mathbf{w}_1) & \dots, & (\mathbf{x}|\mathbf{w}_k) \\ y_1 & & & \\ \vdots & & E_n & \\ y_k & & & \end{pmatrix}) \quad (\because\ (2)) \\
&= (\mathbf{x}|\mathbf{x}) - (\mathbf{x}|\mathbf{y}) = d(\mathbf{x}, W)^2. \quad \square
\end{aligned}
$$

利用上述命题中的符号, $\det(\mathrm{G}(\mathbf{w}_1)) = ||\mathbf{w}_1||^2$. 故

$$
\det \mathrm{G}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \mathrm{d}(\mathbf{w}_1, \langle \mathbf{w}_2 \rangle)^2 \det(\mathrm{G}(\mathbf{w}_2)) = (\underbrace{\mathrm{d}(\mathbf{w}_1, \langle \mathbf{w}_2 \rangle)}_{\text{高}} \underbrace{||\mathbf{w}_2||}_{\text{底}})^2.
$$

故 $\det \mathrm{G}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ 代表由 $\mathbf{w}_1$ 和 $\mathbf{w}_2$ 张成的平行四边形的面积的平方. 通过归纳法, 我们可以利用上述定理看成 $\det \mathrm{G}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k)$ 是由 $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$ 张成的 $2k$ 面体的体积的平方.

设 $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. 则把其列向量看成标准欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中向量, 我们有 $\mathrm{G}(\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(n)}) = A^t A$. 故

$$\det \mathrm{G}(\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(n)}) = \det(A)^2.$$

于是, $|\det(A)|$ 是由 A 的列向量张成的 $2n$ 面体的体积.

例 8.5 在正交变换下确定 $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$ 在标准欧式空间 $\mathbb{R}^2$ 中的轨迹.

解. $q(x,y) = 3x^2 + 2xy + 3y^2 = (x,y)\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. 则 $\chi_A(t) = (t-4)(t-2)$. 设 $\lambda_1 = 4$ 和 $\lambda_2 = 2$. 则 $V^{\lambda_1} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ 和 $V^{\lambda_2} = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$. 令

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

则 P 正交且 $P^t AP = \mathrm{diag}(4,2)$. 即 $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$ 在单位正交基 $\vec{P}^{(1)}$ 和 $\vec{P}^{(2)}$ 下的形式是

$$4X^2 + 2Y^2 = 1, \quad \text{其中} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$