第三章　内积空间

9　Hermitian 空间简介

回忆: $\mathbb{C} = \{x + y\sqrt{-1} \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. 设 $z = x + y\sqrt{-1}$. 则 $\bar{z} = x - y\sqrt{-1}$ 是 z 的共轭.

1. 共轭映射 $^{-} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ 是自同构;
2. 设 $z \in \mathbb{C}$. 则 $z\bar{z}$ 是非负实数; $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$;
3. 设 $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{C}$, $z_1\bar{z}_1 + \cdots + z_k\bar{z}_k \geq 0$; 且
$$z_1\bar{z}_1 + \cdots + z_k\bar{z}_k = 0 \iff z_1 = \cdots = z_k = 0.$$
4. 设 $f \in \mathbb{C}[t] \setminus \mathbb{C}$. 则 f 是 $\mathbb{C}[t]$ 中一次多项式的乘积.

记号. 在本节中 V 是 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间.

9.1　半双线性型

定义 9.1 设 $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$. 如果对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, 我们有

$$f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \alpha f(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \beta f(\mathbf{y}, \mathbf{z})$$

和

$$f(\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{z}) = \bar{\alpha} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \bar{\beta} f(\mathbf{x}, \mathbf{z}),$$

则称 f 是 V 上的半双线性型.

设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基. 矩阵 $A = (f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j))_{n\times n}$ 称为 f 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵. 设 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$ 和 $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + \cdots + y_n\mathbf{e}_n$. 则

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \ldots, x_n)A(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)^t.$$

验证:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i, \mathbf{y}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i f\left(\mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j\mathbf{e}_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i\bar{y}_j f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \\ &= (x_1, \ldots x_n)A\begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

如果对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \overline{f(\mathbf{x}, \mathbf{y})}$, 则半双线性型 f 称为是 *Hermitian* 型的.

对 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, A 的共轭转置 是指矩阵 $\bar{A}^t$, 其中 $\bar{A}$ 是把 A 中元素都取共轭得到的矩阵. 记 A 的共轭转置为 A^*. 如果 $A = A^*$, 则称 A 是 *Hermitian* 型的.

命题 9.2 设 f 是 V 上半双线性型, 矩阵 $A = (f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j))_{n\times n}$ f 在 V 的基底 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵. 则 f 是 *Hermitian* 型的当且仅当 A 是 *Hermitian* 型.

证明. 设 f 是 Hermitian 的. 则

$$A^* = (\overline{f(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i)}) = (f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)) = A.$$

故 A 是 Hermitian 的.

反之, 设 A 是 Hermitian 的. 则对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

$$\begin{aligned}\overline{f(\mathbf{x}, \mathbf{y})} &= \overline{(x_1, \ldots, x_n)A(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)^t} \\ &= \overline{(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)A^t(x_1, \ldots, x_n)^t} \\ &= (y_1, \ldots, y_n)A^*(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)^t \\ &= f(\mathbf{y}, \mathbf{x}). \quad \square\end{aligned}$$

注解 9.3 设 f 是 *Hermitian* 半双线性型. 则

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \overline{f(\mathbf{x}, \mathbf{x})}.$$

于是, $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}$.

定义 9.4 设 f 是 *Hermitian* 半双线性型. 如果对于任意 $\mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, 我们有 $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$, 则称 f 是正定的. 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 是 *Hermitian* 型.

如果对于任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ 我们有 $\mathbf{x}^t A \bar{\mathbf{x}} > 0$. 则称 A 是正定的.

命题 9.5 设 f 是半双线性型, $A=(f(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j))_{n\times n}$ 是 f 在 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵. 则 f 是正定的当且仅当 A 是正定的.

9.2 Hermitian 空间

设 f 是 V 上的正定半双线型. 则 (V,f) 称为 *Hermitian* 空间或 酉空间. 通常把 f 记为 $(|)$. 我们有

1. 对任意 $\alpha,\beta\in\mathbb{C},\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in V$,
$$(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}|z)=\alpha(\mathbf{x}|\mathbf{z})+\beta(\mathbf{y}|\mathbf{z})$$
和
$$(\mathbf{x}|\alpha\mathbf{y}+\beta z)=\bar{\alpha}(\mathbf{x}|\mathbf{y})+\bar{\beta}(\mathbf{x}|\mathbf{z});$$
2. $\overline{(\mathbf{x}|\mathbf{y})}=(\mathbf{y}|\mathbf{x})$;
3. $(\mathbf{x}|\mathbf{x})$ 是非负实数 且 $(\mathbf{x}|\mathbf{x})=0$ 当且仅当 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

设 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k\in V$. 定义
$$\mathrm{G}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m)=((\mathbf{v}_i|\mathbf{v}_j))_{m\times m}.$$
称之为 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m$ 的 *Gram* 矩阵. 矩阵 $\mathrm{G}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m)$ 是 Hermitian 的.

命题 9.6 设 V 是 *Hermitian* 空间, $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m\in V$. 则 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m$ 线性相关当且仅当
$$\mathrm{rank}(\mathrm{G}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m))<m.$$

例 9.7 在 $\mathbb{C}^n$ 中, 对任意 $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)^t$ 和 $\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n)^t$, 定义

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y})=\mathbf{x}^t\bar{\mathbf{y}}=x_1\bar{y}_1+\cdots+x_n\bar{y}_n.$$

则 $\mathbb{C}^n$ 是 *Hermitian* 空间.

设 V 是 Hermitian 空间.

定义 9.8 设 $\mathbf{x}\in V$. 称 $\sqrt{(\mathbf{x}|\mathbf{x})}$ 是 $\mathbf{x}$ 的长度, 记为 $\|\mathbf{x}\|$. 再设 $\mathbf{y}\in V$. 则 $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ 称为 $\mathbf{x}$ 到 $\mathbf{y}$ 之间的距离.

定理 9.9 设 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$. 则 $|(\mathbf{x}|\mathbf{y})|\leq\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ *(Cauchy-Bunyakovski* 不等式*)*. 特别地, $|(\mathbf{x}|\mathbf{y})|=\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ 当且仅当 $\mathbf{x},\mathbf{y}$ 线性相关.

设 $\mathbf{x}\in V\setminus\{\mathbf{0}\}$. 如果 $\|\mathbf{x}\|=1$, 则称 $\mathbf{x}$ 是单位向量.

定义 9.10 设 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$. 如果 $(\mathbf{x}|\mathbf{y})=0$, 则称 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 正交, 记为 $\mathbf{x}\perp\mathbf{y}$.

零向量与任何向量都正交.

引理 9.11 设 $\mathbf{x},\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k\in V$, 其中 $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k$ 非零.

(i) $\mathbf{x}\perp\mathbf{x}\iff\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

(ii) 如果 $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k$ 两两正交, 则它们线性无关.

9.3 单位正交基

设 $\dim(V) = n$, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 中两两正交的单位向量. 根据引理 9.11, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基. 称为 V 的一组单位正交基.

定理 9.12 *(Gram-Schmidt 正交化)* 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$ 线性无关. 则存在两两正交的单位向量 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k$ 使得

$$\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \epsilon_1, \ldots, \epsilon_i \rangle,$$

$i = 1, 2, \ldots, k$. 特别地, V 有单位正交基.

注解 9.13 设 V 是 *Hermitian* 空间, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组单位正交基. 令

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n \quad \text{和} \quad \mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + \cdots + y_n\mathbf{e}_n.$$

则

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = x_1\bar{y}_1 + \cdots + x_n\bar{y}_n.$$

9.4 正交补

定义 9.14 设 $U_1, U_2 \subset V$ 是子空间. 如果对于任意的 $\mathbf{u}_1 \in U_1$ 和 $\mathbf{u}_2 \in U_2$ 我们有 $u_1 \perp u_2$, 则称子空间 U_1 和 U_2 正交, 记为 $U_1 \perp U_2$.

定理 9.15 设 $U \subset V$ 是子空间. 定义

$$U^{\perp} = \{\mathbf{x} \in V \,|\, \forall \mathbf{u} \in U,\ \mathbf{u} \perp \mathbf{x}\}.$$

则

(i) $U^{\perp}$ 是子空间且 $U \perp U^{\perp}$;

(ii) $V = U \oplus U^{\perp}$ (称 $U^{\perp}$ 是 U 的正交补).

(iii) $(U^{\perp})^{\perp} = U$.

推论 9.16 设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$ 是 V 中的单位正交向量. 则 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$ 可扩充为 V 的一组单位正交基.

10 U-矩阵与 U-等价

记号: 在本节中 V 是 n 维 Hermitian 空间, 其中 $n > 0$.

设 V 有两组单位正交基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$, 矩阵 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 满足

$$(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) P.$$

则对任意 $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, 我们有

$$\delta_{i,j} = (\epsilon_i | \epsilon_j) = ((\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)\vec{P}^{(i)} | (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)\vec{P}^{(j)}) = (\vec{P}^{(i)})^t \overline{\vec{P}^{(j)}}.$$

由此得出 $P^t \bar{P} = E$, 进而 $P^* P = E$.

定义 10.1 设 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. 如果 $P^* = P^{-1}$, 则称 P 是 U-矩阵. 所有 n 阶 U-矩阵的集合记为 $\mathbb{U}_n(\mathbb{C})$.

命题 10.2 集合 $\mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ 是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 的子群.

例 10.3 设 $M = A + B\sqrt{-1}$, 其中 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 则 M 是 U-矩阵当且仅当 A^tB 对称 且 $A^tA + B^tB = E$.
证明. 直接计算得

$$M^*M = (A^t - B^t\sqrt{-1})(A + B\sqrt{-1}) = (A^tA + B^tB) + (A^tB - B^tA)\sqrt{-1}.$$

故 $M^*M = E$ 当且仅当 $A^tA + B^tB = E$ 和 $A^tB = B^tA$. □

命题 10.4 设 *Hermitian* 空间 V 有基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$, 矩阵 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 满足

$$(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)P.$$

再设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是单位正交基. 则 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 是单位正交基当且仅当 $P \in \mathbb{U}_n(\mathbb{C})$.

定义 10.5 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. 如果存在 $P \in \mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ 使得 $B = P^{-1}AP$, 则称 A 与 B 是 U-等价(U-相似)的, 记为 $A \sim_u B$.

问题. 给定 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, 求它在 U 等价下的标准型. 给定 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, 判定它们是否 U-等价.

11　正规算子与正规矩阵

记号: 在本节中 V 是 n 维 Hermitian 空间, 其中 $n > 0$.

定义 11.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 如果算子 $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$ 满足对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

$$(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\mathcal{B}(\mathbf{y})),$$

则称 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的伴随算子.

命题 11.2 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则 $\mathcal{A}$ 的伴随算子存在且唯一. 如果 $\mathcal{A}$ 在 V 的单位正交基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵等于 A, 则其伴随算子在该基下的矩阵等于 A^*.

我们把 $\mathcal{A}$ 的伴随算子记为 $\mathcal{A}^*$.

定义 11.3 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 如果 $\mathcal{A}\mathcal{A}^*=\mathcal{A}^*\mathcal{A}$, 则称 $\mathcal{A}$ 是正规算子. 类似地, 设 $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. 如果 $AA^* = A^*A$, 则称 A 是正规矩阵.

命题 11.4 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{L}(V)$ 的单位正交基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵为 A. 则 $\mathcal{A}$ 正规当且仅当 A 正规.

定义 11.5 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 如果 $\mathcal{A}^*=\mathcal{A}$, 则称 $\mathcal{A}$ 是 Hermitian 算子. 如果 $\mathcal{A}^*=-\mathcal{A}$, 则称 $\mathcal{A}$ 是斜 Hermitian 算子.

Hermitian 和斜 Hermitian 算子都是正规算子. 显然, Hermitian 和斜 Hermitian 矩阵($A^* = -A$)都是正规矩阵.

命题 11.6 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{L}(V)$ 的单位正交基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵为 A. 则 $\mathcal{A}$ *(斜) Hermitian* 算子当且仅当 A *(斜) Hermitian* 矩阵.

定义 11.7 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 如果对于任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathcal{A}(\mathbf{y})),$$

则称 $\mathcal{A}$ 是保内*(*积*)*的.

命题 11.8 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{L}(V)$ 的单位正交基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵为 A. 则下列断言等价

(i) $\mathcal{A}$ 保内;

(ii) $A \in \mathbb{U}_n(\mathbb{C})$;

(iii) 对任意 $\mathbf{x} \in V$, $\|\mathbf{x}\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|$ (保长);

(iv) 对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{y})\|$ (保距).

注解 11.9 保内算子也称为 U-算子.

12 正规矩阵的标准型

引理 12.1 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. 如果 $\mathrm{tr}(A^*A) = 0$, 则 $A = O$.

引理 12.2 设

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ O_{(n-k)\times k} & D \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}), \quad \text{其中 } B \in \mathrm{M}_k(\mathbb{C}).$$

如果 A 正规, 则 $C = O_{k\times(n-k)}$.

引理 12.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 是正规算子, $W \subset V$ 是 $\mathcal{A}$-子空间. 则

(i) $W^{\perp}$ 也是 $\mathcal{A}$-子空间;

(ii) $\mathcal{A}_W$ 也是正规算子.

引理 12.4 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则 $\mathcal{A}$ 有一维 $\mathcal{A}$-不变子空间.

定理 12.5 设 $\mathcal{A} \in V$ 正规. 则存在 V 的一组单位正交基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 使得 $\mathcal{A}$ 在该基下是对角阵.

推论 12.6 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 正规. 则存在 A 与某个对角矩阵 U-相似.

定理 12.7 *(i)* 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ *Hermitian*. 则 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组单位正交基下的矩阵是 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, 其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ 不必两两不同.

(ii) 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ *Hermitian*. 则 $A \sim_u \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, 其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ 不必两两不同.

(iii) 特别地, *Hermitian* 矩阵和 *Hermitian* 算子的特征根都是实数.

证明. 这里只证明 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. 因为 A Hermitian 且 $A \sim_u \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, 所以 $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ 也是 Hermitian 的. 由此可知,

$$\begin{aligned}\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^* &= \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \\ &\Rightarrow \bar{\lambda}_1 = \lambda_1, \ldots, \bar{\lambda}_n = \lambda_n \\ &\Rightarrow \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}. \quad \square\end{aligned}$$

定理 12.8 *(i)* 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 斜 *Hermitian.* 则 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组单位正交基下的矩阵是 $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, 其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 是零或纯虚数不必两两不同.

(ii) 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 斜 *Hermitian.* 则 $A \sim_u \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, 其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 是零或纯虚数不必两两不同.

(iii) 特别地, 斜 *Hermitian* 矩阵和斜 *Hermitian* 算子的特征根都是零或纯虚数.

证明. 这里只证明 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 是零或者纯虚数. 因为 A 是斜 Hermitian 且 $A \sim_u \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, 所以 $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

也是斜 Hermitian 的. 由此可知,

$$\begin{aligned}\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)^* &= -\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\\ &\Rightarrow \bar{\lambda}_1=-\lambda_1,\ldots,\bar{\lambda}_n=-\lambda_n\\ &\Rightarrow \lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\{y\sqrt{-1}\,|\,y\in\mathbb{R}\}. \quad\square\end{aligned}$$

定理 12.9 *(i)* 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 是 U-算子. 则 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组单位正交基下的矩阵是 $\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, 其中 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ 的复数模长等于 *1*.

(ii) 设 $A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 是 U-矩阵. 则 $A\sim_u \operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, 其中 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ 的复数模长等于 *1.*.

(iii) 特别地, U-矩阵和 U-算子的特征根的复数模长都等于 *1*.

证明. 这里只证明 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ 是的模长等于 1. 因为 A 是 U 矩阵且 $A\sim_u \operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, 所以 $\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ 也是 U 矩阵. 由此可知,

$$\begin{aligned}\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)^* &= \operatorname{diag}(\lambda_1^{-1},\ldots,\lambda_n^{-1})\\ &\Rightarrow \bar{\lambda}_1=\lambda_1^{-1},\ldots,\bar{\lambda}_n=\lambda_n^{-1}\\ &\Rightarrow |\lambda_1|=\cdots=|\lambda_n|=1. \quad\square\end{aligned}$$

关于期末考试和 Jordan 标准型的

A　线性算子

1. 不同线性空间之间的线性映射不考
2. 设 $\mathcal{A}: V \to V$ 是线性算子, $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 是 V 的一组基. 计算 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵, 确定关于 $\ker(\mathcal{A})$ 和 $\operatorname{im}(\mathcal{A})$ 的信息（送分童子)
3. 线性算子的类型 (数乘、幂等、幂零）
4. 矩阵相似的定义和相似不变量
5. 线性算子可核像分解的充要条件
6. 极小多项式, 不变子空间
7. 核核分解不考
8. 特征向量、特征值、特征子空间和特征多项式
9. 可对角化的充要条件
10. 循环子空间, 循环子空间的充要条件, 循环子空间分解定理

11. Hamilton-Cayley 定理, 极小多项式和特征多项式的关系, 计算二阶矩阵的幂次（送分童子)

12. 复数域中 Jordan 标准型的存在性，确定低阶矩阵的 Jordan 标准型（送分童子)

B 内积空间

1. 欧式空间中内积的定义, 双线性，对称和正定性. Gram 矩阵

2. Cauchy 不等式、三角不等式、勾股定理. 长度、距离、角度、正交、单位化的定义.

3. 单位正交基和 Gram-Schmidt 正交化

4. 正交投影和正交补. 通过解空间给出子空间，确定该子空间的正交补（送分童子)

5. 正交矩阵的定义和基本性质. 正交等价 (正交相似) 的定义和基本性质

6. 正规算子和正规矩阵的定义和标准型

7. 计算实对称矩阵在正交等价意义下的标准型和转换矩阵（送分童子)

8. 对称、斜对称和正交矩阵在正交等价意义下的标准型和它们的特征根

9. 利用对称、斜对称和正交矩阵在正交等价意义下的标准型证明若干套路题

C 初等因子组

记号: 除非特别说明, 在本节中 V 是 F 上的 n 维线性空间, 其中 F 是任意域.

重集 是指元素可以重复出现的集合.

例 C.1 设 $S = \{a, a, b\}$ 和 $T = \{a, b\}$. 它们作为重集不相等. 元素 a 在 S 中的重数等于 2, 在 T 中等于 1.

例 C.2 我们由素分解 $24 = 2^3 3$. 利用重集表示 24 的素因子为 $\{2, 2, 2, 3\}$.

定义 C.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$,

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k \tag{1}$$

是 V 的 $\mathcal{A}$-不可分子空间直和分解. 令 $\mathcal{A}_i{=}\mathcal{A}_{W_i}$ 和 $\mu_i{=}\mu_{\mathcal{A}_i}$. 重集 $\{\mu_1, \ldots, \mu_k\}$ 称为 $\mathcal{A}$ 关于 (1) 的初等因子组.

由上一讲引理 10.5 可知, 初等因子组中的元素都是 $F[t]$ 中(首一)不可约多项式的幂次. 类似地, 我们可以定义矩阵的初等因子组.

例 C.4 设 $\mathcal{E}$ 是 V 上的恒同算子, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基. 则

$$V = \langle \mathbf{e}_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle \mathbf{e}_n \rangle,$$

是 V 的一个 $\mathcal{E}$-不可分子空间的直和分解. 算子 $\mathcal{E}$ 关于上述直和分解的初等因子组是

$$\{\underbrace{t-1, \ldots, t-1}_{n}\}.$$

例 C.5 设 $\mathcal{D}$ 是 $\mathbb{R}[x]^{(n)}$ 上的导数算子. 则 $\mathbb{R}[x]^{(n)}$ 是 $\mathcal{D}$-不可分的. 于是, $\mathcal{D}$ 的初等因子组是 $\{t^n\}$.

在本节中, 我们将说明以下结论:

(i) 对于任何 V 的 $\mathcal{A}$-不可分子空间直和分解, 初等因子组相同;

(ii) 当 $F = \mathbb{C}$ 时, 初等因子组唯一确定 Jordan 标准型;

(iii) 初等因子组可以通过计算若干矩阵的秩得到.

引理 C.6 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $f \in F[t]$. 设

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_\ell, \tag{2}$$

其中 $U_1,\ldots,U_\ell$ 是 $\mathcal{A}$-不变的子空间. 则

$$f(\mathcal{A})(V)=f(\mathcal{A})(U_1)\oplus\cdots\oplus f(\mathcal{A})(U_\ell).$$

证明. 设 $W=f(\mathcal{A})(U_1)+\cdots+f(\mathcal{A})(U_\ell)$. 因为 $U_i\subset V$, 所以 $f(\mathcal{A})(U_i)\subset f(\mathcal{A})(V)$. 于是, $W\subset f(\mathcal{A})(V)$. 反之, 设 $\mathbf{x}\in f(\mathcal{A})(V)$. 则存在 $\mathbf{v}\in V$ 使得 $\mathbf{x}=f(\mathcal{A})(\mathbf{v})$. 由 (2) 可知

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_1+\cdots+\mathbf{v}_\ell,$$

其中 $\mathbf{v}_i\in U_i, i=1,2,\ldots,\ell$. 由此得出

$$\mathbf{x}=f(\mathcal{A})(\mathbf{v})=f(\mathcal{A})(\mathbf{v}_1)+\cdots+f(\mathcal{A})(\mathbf{v}_\ell).$$

因为 U_i 是 $\mathcal{A}$-不变的, 所以 $f(\mathcal{A})(\mathbf{v}_i)\in U_i$. 故 $\mathbf{x}\in W$. 我们得到 $f(\mathcal{A})(V)=W$.

下面验证: $f(\mathcal{A})(U_1)+\cdots+f(\mathcal{A})(U_\ell)$ 是直和. 设

$$\mathbf{0}=\mathbf{w}_1+\cdots+\mathbf{w}_\ell,$$

其中 $\mathbf{w}_i\in f(\mathcal{A})(U_i)$. 则 $\mathbf{w}_i\in U_i$. 由 (2) 可知, $\mathbf{w}_i=\mathbf{0}$, $i=1,2,\ldots,\ell$ (第一章第二讲命题 4.16). 进而, 同样的命题蕴含 $f(\mathcal{A})(U_1)+\cdots+f(\mathcal{A})(U_\ell)$ 是直和. □

引理 C.7 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, V 是 $\mathcal{A}$-循环的. 设 $\mu_{\mathcal{A}}=p^m$, 其中 $p\in F[t]\setminus F$. 则

$$\operatorname{rank}(p(\mathcal{A})^k)=\begin{cases}(m-k)\deg(p), & 0\le k\le m\\ 0, & k>m.\end{cases}$$

证明. 当 $k \geq m$ 时, $p^k(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$. 故 $\operatorname{rank}(p^k(\mathcal{A})) = 0$.

下面设 $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, $\mathbf{v} \in V$ 是 $\mathcal{A}$-循环向量, 且 $\mathbf{w}_k = p(\mathcal{A})^k(\mathbf{v})$.

断言 1. $\operatorname{im}(p^k(\mathcal{A})) = F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}_k$.

断言 1 的证明. 设 $\mathbf{x} \in V$. 则存在 $f \in F[t]$ 使得 $\mathbf{x} = f(\mathcal{A})(\mathbf{v})$ (第二章第四讲命题 9.2 (i)). 于是,

$$p^k(\mathcal{A})(\mathbf{x}) = p^k(\mathcal{A}) f(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = f(\mathcal{A}) p(\mathcal{A})^k(\mathbf{v}) = f(\mathcal{A})(\mathbf{w}_k) \in F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}_k.$$

由此得出, $\operatorname{im}(p^k(\mathcal{A})) \subset F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}_k$. 反之, 由 $\mathbf{w}_k$ 的定义可知, $\mathbf{w}_k \in \operatorname{im}(p^k(\mathcal{A}))$. 因为 $\operatorname{im}(p^k(\mathcal{A}))$ 是 $\mathcal{A}$-不变的(第二章第三讲命题 5.5), 所以 $F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}_k \subset \operatorname{im}(p^k(\mathcal{A}))$. 断言 1 成立.

断言 2. 设 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 在 $F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}_k$ 上的限制算子, 则 $\mu_{\mathcal{B}} = p^{m-k}$.

断言 2 的证明. 设 $\mathbf{x} \in F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}_k$. 则存在 $g \in F[t]$ 使得

$$\mathbf{x} = g(\mathcal{B}) p^k(\mathcal{B})(\mathbf{v}) \implies p^{m-k}(\mathcal{B})(\mathbf{x}) = g(\mathcal{B}) p^m(\mathcal{B})(\mathbf{v}) = \mathbf{0}.$$

故 $p^{m-k}(\mathcal{B}) = \mathcal{O}$. 故 $\mu_{\mathcal{B}} | p^{m-k}$. 反之, $\mu_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \mathcal{O}$ 蕴含

$$\mu_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})(\mathbf{w}_k) = \mathbf{0} \implies \mu_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) p^k(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \implies (\mu_{\mathcal{B}} p^k)(\mathcal{A}) = \mathcal{O}.$$

故 $\mu_{\mathcal{A}} | (\mu_{\mathcal{B}} p^k)$. 从而 $p^{m-k} | \mu_{\mathcal{B}}$. 综上所述, 断言 2 成立.

断言 1 和 2, 以及第二章第五讲定理 9.8 蕴含

$$\dim(\operatorname{im}(p^k(\mathcal{A}))) = (m-k)\deg(p).$$

根据第二章第一讲推论 1.14, $\operatorname{rank}(p^k(\mathcal{A})) = (m-k)\deg(p)$.

□

定理 C.8 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\mu_{\mathcal{A}} = p^m$, 其中 $p \in F[t] \setminus F$ 不可约. 对任意 $\ell \in \mathbb{Z}^+$, 设 n_ℓ 是 p^ℓ 在 V 的某个 $\mathcal{A}$-不可分子空间分解的初等因子组中 p^ℓ 的重数. 令 $d = \deg(p)$ 和 $r_i = \mathrm{rank}(p^i(\mathcal{A})), i \in \mathbb{N}$. 则

$$n_\ell = \frac{1}{d}(r_{\ell-1} + r_{\ell+1} - 2r_\ell). \tag{3}$$

证明. 设

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k \tag{4}$$

是 V 的一个 $\mathcal{A}$-不可分子空间分解. 设 $\mathcal{A}_i{=}\mathcal{A}_{V_i}$ 和 $\mu_i{=}\mu_{\mathcal{A}_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. 则存在 $m_1, \ldots, m_k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ 使得 $\mu_1 = p^{m_1}$, $\mu_2 = p^{m_2}$, $\ldots$, $\mu_k = p^{m_k}$. (见第二章第三讲定理 5.9). 由第二章第五讲定理 9.8 和第二章第五讲引理 9.15, $\dim(V_i) = m_i d$, $i = 1, 2, \ldots, k$. 特别地, $\dim(V_i) \le md$. 令 $\mathbb{S}{=}\{V_1, \ldots, V_k\}$. 则 n_ℓ 是 $\mathbb{S}$ 中维数为 ℓd 的子空间的个数.

对 $j \in \{1, \ldots, m\}$, 令 $\mathbb{S}_j = \{U \in \mathbb{S} \mid \dim(U) = jd\}$. 则 (4) 可重写为

$$V = \bigoplus_{j=1}^{m} \left(\bigoplus_{U \in \mathbb{S}_j} U \right). \tag{5}$$

根据引理 C.6, 我们有

$$p(\mathcal{A})^\ell(V) = \bigoplus_{j=1}^{m} \left(\bigoplus_{U \in \mathbb{S}_j} p(\mathcal{A})^\ell(U) \right).$$

注意到当 $U \in \mathbb{S}_j$ 时, U 不但是 $\mathcal{A}$-循环的且 $\mathcal{A}|_U$ 的极小多项式是 p^j. 根据引理 C.7, 当 $j > \ell$ 时,

$$\operatorname{rank}(p^{\ell}(\mathcal{A}|_U)) = (j-\ell)d \tag{6}$$

且当 $j \leq \ell$ 时, $p(\mathcal{A})^{\ell}(U)$=$\{\mathbf{0}\}$. 特别地, 上式可缩写为

$$p(\mathcal{A})^{\ell}(V) = \bigoplus_{j=\ell+1}^{m}\left(\bigoplus_{U\in\mathbb{S}_j} p(\mathcal{A})^{\ell}(U)\right). \tag{7}$$

我们运用维数和秩的关系推导:

$$\begin{aligned}
r_\ell &= \dim\big(p(\mathcal{A})^{\ell}(V)\big) \quad (r_\ell \text{ 的定义}) \\
&= \dim\left(\bigoplus_{j=\ell+1}^{m}\left(\bigoplus_{U\in\mathbb{S}_j} p(\mathcal{A})^{\ell}(U)\right)\right) \quad (\text{根据 } (7)) \\
&= \sum_{j=\ell+1}^{m}\left(\sum_{U\in\mathbb{S}_j} \dim(p(\mathcal{A})^{\ell}(U))\right) \quad (\text{第一章第二讲命题 } 4.15) \\
&= \sum_{j=\ell+1}^{m}\left(\sum_{U\in\mathbb{S}_j} \operatorname{rank}(p(\mathcal{A}_U)^{\ell})\right) \quad (\text{限制算子和第二章第一讲推论 } 1.14) \\
&= \sum_{j=\ell+1}^{m}\left(\sum_{U\in\mathbb{S}_j} (j-\ell)d\right) \qquad ((6)) \\
&= \sum_{j=\ell+1}^{m} n_j(j-\ell)d \quad (n_j \text{ 的定义})
\end{aligned}$$

对任意 $\ell \in \mathbb{Z}^+$ 成立. 令 $r_0 = \dim(V)$. 则由上式和 (9), 我

们有

$$r_\ell = d\sum_{j=\ell+1}^{m} n_j(j-\ell) \tag{8}$$

对任意 $\ell \in \mathbb{N}$ 成立.

我们要利用 (8) 把 $n_1, n_2, \ldots,$ 用 $r_0, r_1, r_2, r_3, \ldots,$ 表示出来. 根据 (8) 可知, 对任意 $\ell \in \mathbb{Z}^+$

$$r_{\ell-1} = d\left(n_\ell + 2n_{\ell+1} + \sum_{j=\ell+2}^{m} n_j(j-\ell+1)\right),$$

$$r_\ell = d\left(n_{\ell+1} + \sum_{j=\ell+2}^{m} n_j(j-\ell)\right),$$

和

$$r_{\ell+1} = d\left(\sum_{j=\ell+2}^{m} n_j(j-\ell-1)\right).$$

于是,

$$r_{\ell-1}-r_\ell = d\left(n_\ell + n_{\ell+1} + \sum_{j=\ell+2}^{m} n_j\right), \quad r_\ell-r_{\ell+1} = d\left(n_{\ell+1} + \sum_{j=\ell+2}^{m} n_j\right)$$

即

$$(r_{\ell-1}-r_\ell)-(r_\ell-r_{\ell+1}) = dn_\ell \implies n_\ell = \frac{1}{d}(r_{\ell-1}+r_{\ell+1}-2r_\ell). \quad \square$$

例 C.9 设

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -6 & 5 \\ 5 & -1 & 8 & -7 \\ -2 & 1 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & -11 & 9 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{C}).$$

已知 $\chi_A = t^4$. 计算 J_A.

解. $r_0 = \mathrm{rank}(A^0) = 4$, $r_1 = \mathrm{rank}(A) = 2$. 于是, 0 的几何重数等于 2. 由此得出 J_A 中有两个关于 0 的 *Jordan* 块.

$$r_2 = \mathrm{rank}(A^2) = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 1.$$

于是

$$n_1 = 4 + 1 - 2 \times 2 = 1.$$

由此直接推出 $n_2 = 0$, $n_3 = 1$, $n_4 = 0$. 故

$$J_A = \begin{pmatrix} {\color{blue}J_3(0)} & \\ & {\color{red}J_1(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {\color{blue}0} & {\color{blue}1} & {\color{blue}0} & 0 \\ {\color{blue}0} & {\color{blue}0} & {\color{blue}1} & 0 \\ {\color{blue}0} & {\color{blue}0} & {\color{blue}0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {\color{red}0} \end{pmatrix}.$$

定理 C.10 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\mu_{\mathcal{A}}$ 在 $F[t]$ 中的两两互素首一的不可约因子是 $p_1, \dots, p_s$, 它们的次数分别是 $d_1, \dots, d_s$. 设 $\ell \in \mathbb{Z}^+$, $i \in \{1, 2, \dots, s\}$, $N(i, \ell)$ 是 p_i^ℓ 在 V 的某个 $\mathcal{A}$-不可分子空间分解的初等因子组中的重数. 则

$$N(i,\ell) = \frac{1}{d_i}(R(i,\ell-1) + R(i,\ell+1) - 2R(i,\ell)),$$

其中 $R(i,j) = \operatorname{rank}(p_i(\mathcal{A})^j)$, $j \in \mathbb{N}$. 特别地, 任何 $\mathcal{A}$-不可分子空间分解初等因子组都相等(称为 $\mathcal{A}$ 的初等因子组).

证明. 设

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k \tag{9}$$

是 V 的一个 $\mathcal{A}$-不可分子空间分解. 注意到对 $j = 1, 2, \dots, k$, $\mu_j = \mu_{\mathcal{A}_{V_j}}$ 是某个 $p_1, \dots, p_s$ 的幂次. 我们不妨对 $i = 1$ 来证明定理的结论.

设 $\mathbb{S} = \{V_1, \dots, V_k\}$ 且 $\mathbb{S}_1 = \{U \in \mathbb{S} \mid p_1 \mid \mu_{\mathcal{A}_U}\}$. 令

$$W = \bigoplus_{U \in \mathbb{S}_1} U \quad \text{和} \quad \widetilde{W} = \bigoplus_{U \in (\mathbb{S} \setminus \mathbb{S}_1)} U.$$

则

$$V = W \oplus \widetilde{W}. \tag{10}$$

断言 1. 对任意 $\ell \in \mathbb{N}$, 令 $r_\ell = \operatorname{rank}(p_1(\mathcal{A}_W)^\ell)$. 则

$$N(1,\ell) = \frac{1}{d_1}(r_{\ell-1} + r_{\ell+1} - 2r_\ell).$$

断言 1 的证明. 注意到 $\mathcal{A}_W$ 是 W 上的线性算子,

$$W = \bigoplus_{U \in \mathbb{S}_1} U$$

是 W 的 A_W-不可分子空间分解, 且 $\mathcal{A}_W$ 的极小多项式是 p_1 的某个幂次, 根据定理 C.8, p_1^ℓ 在 $\mathcal{A}_W$ 关于上述 W 的直和分解的初等因子组中出现的重数

$$n_\ell = \frac{1}{d_1}(r_{\ell-1} + r_{\ell+1} - 2r_\ell).$$

再注意到对任意 $U \in (\mathbb{S} \setminus \mathbb{S}_1)$, $\mathcal{A}_U$ 的极小多项式都不是 p_1 的任何幂次. 于是 $N(1, \ell) = n_\ell$. 断言 1 成立.

断言 2. $p_1(\mathcal{A})|_{\widetilde{W}}$ 上可逆.

断言 2 的证明. 设 $\mu_{\mathcal{A}_W} = p_1^m$ 且 $q = \mu_{\mathcal{A}_{\widetilde{W}}}$. 因为 q 是 $p_2, \ldots p_s$ 的幂次之积 (第二章第二讲定理 6.9), 所以 p_1^m 与 q 互素. 于是 $\mu_{\mathcal{A}} = \operatorname{lcm}(p_1^m, q) = p_1^m q$ (第二章第二讲引理 6.7 和 定理 5.3). 根据 Bezout 关系, 存在 $a, b \in F[t]$ 使得 $a(t)p^m(t) + b(t)q(t) = 1$. 故 $a(\mathcal{A})p^m(\mathcal{A}) + b(\mathcal{A})q(\mathcal{A}) = \mathcal{E}$. 因为 $q(\mathcal{A})$ 限制在 $\tilde{W}$ 上是零算子, 所以对任意 $\mathbf{x} \in \tilde{W}$, $a(\mathcal{A})p^m(\mathcal{A})(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. 故 $p^m(\mathcal{A})$ 在 $\tilde{W}$ 可逆. 进而, $p(\mathcal{A})$ 在 $\tilde{W}$ 上也可逆. 断言 2 成立.

断言 3. 对任意 $\ell \in \mathbb{N}$, $R(1, \ell) = r_\ell + \dim(\widetilde{W})$.

断言 3 的证明. 由引理 C.6,

$$p_1(\mathcal{A})^\ell(V) = p_1(\mathcal{A})^\ell(W) \oplus p_1(\mathcal{A})^\ell(\widetilde{W}).$$

于是,

$$\dim(p_1(\mathcal{A})^\ell(V)) = \dim(p_1(\mathcal{A})^\ell(W)) + \dim(p_1(\mathcal{A})^\ell(\widetilde{W})).$$

根据断言 2, $\dim(p_1(\mathcal{A})^\ell(V)) = \dim(p_1(\mathcal{A}_W)^\ell(W)) + \dim(\widetilde{W})$. 故 $R(1,\ell) = r_\ell + \dim(\widetilde{W})$. 断言 3 成立.

对任意 $\ell \in \mathbb{Z}^+$, 我们计算

$$\begin{aligned}
N(1,\ell) &= \frac{1}{d_1}(r_{\ell-1} + r_{\ell+1} - 2r_\ell) \ (\text{断言 } 1) \\
&= \frac{1}{d_1}(r_{\ell-1} + \dim(\widetilde{W}) + r_{\ell+1}\dim(\widetilde{W}) - 2(r_\ell + \dim(\widetilde{W}))) \\
&= \frac{1}{d_1}(R(1,\ell-1) + R(1,\ell+1) - 2R(1,\ell)) \ (\text{断言 } 3).
\end{aligned}$$

由上述公式看出, 初等因子组只与 $p_i(\mathcal{A})^\ell$ 有关. 故初等因子组独立于 $\mathcal{A}$-不可分子空间分解的选择. □

定义 C.11 设 $A \in \mathrm{M}_n(F)$. 把 A 看成从 F^n 上的线性算子所对应的初等因子组称为矩阵 A 的初等因子组.

定理 C.12 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. 在不计 *Jordan* 块出现顺序的前提下, A 的 *Jordan* 标准型由 A 的初等因子组唯一确定.

证明. 设 $\mathcal{A} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ 由公式 $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ 确定. 设

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$$

是 V 的一个 $\mathcal{A}$-不可分子空间分解. 令 $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{V_i}$ 和 $\mu_i = \mu_{\mathcal{A}_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. 根据代数学基本定理, 存在 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in$

$\mathbb{C}$ (不必两两不同), $d_1, \ldots, d_k \in \mathbb{Z}^+$ 使得

$$\mu_1 = (t - \alpha_1)^{d_1}, \ldots, \mu_k = (t - \alpha_k)^{d_k}.$$

于是, $\mathcal{A}$ 的初等因子组是

$$\{(t - \alpha_1)^{d_1}, \ldots, (t - \alpha_k)^{d_k}\}.$$

根据第二章第五讲引理 11.1, $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵是

$$J_A = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\alpha_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_k}(\alpha_k) \end{pmatrix}.$$

于是, $A \sim_s J_A$ 且 J_A 由$\mathcal{A}$ 的初等因子组唯一确定. $\square$

由上述定理可知, 记号 J_A 以及把 J_A 称为 A 的 Jordan 标准型都是合理的. 进而, 计算复数域上方阵的 Jordan 标准型等价于计算该矩阵的初等因子组.

注解 C.13 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 且 $\mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$. 则 $\chi_{\mathcal{A}}$ 的不可约因子是 $t - \lambda_1, \ldots, t - \lambda_s$. 我们可以把上一讲定理 *11.10* 中的 $R(i, \ell)$ 和 $N(i, \ell)$ 分别记为 $R(\lambda_i, \ell)$ 和 $N(\lambda_i, \ell)$. 此时的重数公式是

$$N(\lambda_i, \ell) = R(\lambda_i, \ell - 1) + R(\lambda_i, \ell + 1) - 2R(\lambda_i, \ell),$$

其中 $\lambda_i \in \mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(A), \ell \in \mathbb{Z}^+$.

例 C.14 设:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_7(\mathbb{C}).$$

计算 J_A.

解. 由计算机计算得:

$$\chi_{\mathcal{A}} = t^7 - 9\,t^6 + 34\,t^5 - 70\,t^4 + 85\,t^3 - 61\,t^2 + 24\,t - 4 = (t-2)^2(t-1)^5.$$

设 $\lambda_1 = 2$ 和 $\lambda_2 = 1$. 显然 $R(\lambda_1, 0) = 7$. 由计算机得 $R(\lambda_1, 1) = 6, R(\lambda_1, 2) = 5$. 于是,

$$N(\lambda_1, 1) = R(\lambda_1, 0) + R(\lambda_1, 2) - 2R(\lambda_1, 1) = 7 + 5 - 2 \times 6 = 0.$$

由计算机得 $R(\lambda_1, 3) = 5.$, 于是,

$$N(\lambda_1, 2) = R(\lambda_1, 1) + R(\lambda_1, 3) - 2R(\lambda_1, 2) = 6 + 5 - 2 \times 5 = 1.$$

因为 λ_1 的代数重数等于 2, 所以当 $\ell > 2$ 时, $N(\lambda_1, \ell) = 0$. 显然 $R(\lambda_2, 0)=7$. 由计算机得 $R(\lambda_2, 1)=4, R(\lambda_2, 2)=2$. 于

是,

$$N(\lambda_2,1)=R(\lambda_2,0)+R(\lambda_2,2)-2R(\lambda_2,1)=7+2-2\times 4=1.$$

由计算机计算得 $R(\lambda_2,3)=2$. 于是,

$$N(\lambda_2,2)=R(\lambda_2,1)+R(\lambda_2,3)-2R(\lambda_2,2)=4+2-2\times 2=2.$$

因为 λ_2 的代数重数等于 5, 所以当 $\ell>2$ 时, $N(\lambda_2,\ell)=0$.

由此得出

$$J_A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

例 C.15 设 $A\in \mathrm{M}_5(\mathbb{C})$. 设

$$\operatorname{rank}(A)=3,\ \operatorname{rank}(A^2)=2,\ \operatorname{rank}(A+E)=4,\ \operatorname{rank}((A+E)^2)=3.$$

求 J_A

解. 由秩的条件可知 $\lambda_1=0$ 和 $\lambda_2=-1$ 是 A 的两个特征根. 根据上一讲定理 *11.10*,

$$N(\lambda_1,1)=R(\lambda_1,0)+R(\lambda_1,2)-2R(\lambda_1,1)=5+2-2\times 3=1$$

和

$$N(\lambda_2,1)=R(\lambda_2,0)+R(\lambda_2,2)-2R(\lambda_2,1)=5+3-2\times4=0.$$

注意到 $\mathrm{rank}(A)=3$ 和 $\mathrm{rank}(A+E)=4$ 分别蕴含 λ_1 的几何重数是 2 和 λ_2 的几何重数是 1. 由此得出 $N(\lambda_1,2)=1$ 和 $N(\lambda_2,2)=1$. 我们有

$$J_A=\begin{pmatrix}0&&&&\\&0&1&&\\&0&0&&\\&&&-1&1\\&&&0&-1\end{pmatrix}. \quad \square$$

D 矩阵相似的判定

引理 D.1 设 $A,B\in\mathrm{M}_n(F)$ 且 $A\sim_s B$. 则对任意 $f\in F[t]$, $f(A)\sim_s f(B)$. 特别地, $\mathrm{rank}(f(A))=\mathrm{rank}(f(B))$.

证明. 设 $A=P^{-1}BP$, 其中 $P\in\mathrm{GL}_n(F)$. 因为对任意 $k\in\mathbb{N}$, $A^k=P^{-1}B^kP$, 所以 $f(A)=P^{-1}f(B)P$. $\square$

定理 D.2 *(相似判别法I)* 设 $A,B\in\mathrm{M}_n(F)$. 则 $A\sim_s B$ 当且仅当 A 和 B 由共同的初等因子组.

证明. 设 $A\sim_s B$. 则 $\mu_A=\mu_B$ (第二章第二讲命题 4.9). 设 $p_1,\ldots p_s$ 是 μ_A 的两两互素的首一的不可约因子. 则它们

也是 μ_B 的两两互素的首一的不可约因子. 根据引理 D.1, 对任意 $\ell \in \mathbb{N}, i \in \{1, 2, \ldots, s\}$, $\operatorname{rank}(p_i(\mathcal{A})^\ell) = \operatorname{rank}(p_i(\mathcal{B})^\ell)$. 由上一讲定理 11.10, A 和 B 由共同的初等因子组.

反之, 设 A 和 B 由共同的初等因子组 $\{p_1, \ldots, p_k\}$. 把 A 和 B 看成 F^n 的算子分别记为 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$. 令

$$F^n = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k,$$

其中 V_i 是 $\mathcal{A}$-不可分的, W_i 是 $\mathcal{B}$-不可分的, $i{=}1, 2, \ldots, k$. 调整下标后可再设 $\mathcal{A}_{V_i}$ 和 $\mathcal{B}_{W_i}$ 的极小多项式都是 p_i. 令

$$p_i = t^{d_i} + \alpha_{i,d_i-1} t^{d_i-1} + \cdots + \alpha_{i,1} t + \alpha_{i,0},$$

其中 $\alpha_{i,n-1}, \ldots, \alpha_{i,1}, \alpha_{i,0} \in F$. 因为 V_i 是 $\mathcal{A}$-不可分的, 所以它是 $\mathcal{A}$-循环的. 于是存在 $\mathbf{v}_i \in V$ 使得 $V_i = F[\mathcal{A}_{V_i}] \cdot \mathbf{v}_i$. 由此得出 $\mathcal{A}_{U_i}$ 在基底 $\mathbf{v}_i, \mathcal{A}(\mathbf{v}_i), \ldots \mathcal{A}^{d_i-1}(\mathbf{v}_i)$ 下的矩阵是

$$M_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{i,0} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{i,1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{i,d_i-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{d_i}(F).$$

同理存在 $\mathbf{w}_i \in V$ 使得 $W_i = F[\mathcal{B}_{V_i}]\mathbf{w}_i$, 且 $\mathcal{B}_{W_i}$ 在基底 $\mathbf{w}_i, \mathcal{B}(\mathbf{w}_i), \ldots \mathcal{B}^{d_i-1}(\mathbf{w}_i)$ 下的矩阵也是 M_i. 由第二章第三

讲定理 5.9,

$$A \sim_s \begin{pmatrix} M_1 & O & \cdots & O \\ O & M_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & M_k \end{pmatrix} \quad 和 \quad B \sim_s \begin{pmatrix} M_1 & O & \cdots & O \\ O & M_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & M_k \end{pmatrix}.$$

于是, $A \sim_s B$. □

定理 D.3 *(相似判别法II) 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(F)$. 则 $A \sim_s B$ 当且仅当下述两点同时成立:*

(i) $\chi_A = \chi_B$, 或 $\mu_A = \mu_B$;

(ii) 设 $p_1, \ldots, p_s$ 是 χ_A 或 μ_A 在 $F[t]$ 中的两两互素的(首一的)不可约因子, 且

$$\forall\, i \in \{0, 1, \ldots, n+1\}, j \in \{1, 2, \ldots, s\}, \ \mathrm{rank}(p_j(A)^i) = \mathrm{rank}(p_j(B)^i).$$

证明. 设 $A \sim_s B$. 则 $\chi_A = \chi_B$ 和 $\mu_A = \mu_B$ (第二章第三讲定义 7.6 后的讨论和第二章第二讲命题 4.9). 由引理 D.1, 对任意 $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$,

$$p_j(A)^i \sim_s p_j(B)^i \implies \mathrm{rank}(p_j(A)^i) = \mathrm{rank}(p_j(B)^i).$$

反之, 设 $\chi_A = \chi_B$ 和 (ii), 或 $\mu_A = \mu_B$ 和 (ii) 成立. 则 A 和 B 由共同的初等因子组(上一讲定理 11.10). 于是, $A \sim_s B$ (定理 D.2). □

定理 D.4 *(相似判别法III)* 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(F)$. 则 $A \sim_s B$ 当且仅当对任意 $f \in F[t]$, $\mathrm{rank}(f(A)) = \mathrm{rank}((f(B))$.

证明. 设 $A \sim_s B$. 引理 D.1 蕴含, 对任意 $f \in F[t]$, $\mathrm{rank}(f(A)) = \mathrm{rank}((f(B))$. 反之, 因为 $\mathrm{rank}(\mu_A(A))$=0, 所以 $\mathrm{rank}(\mu_A(B))$=0. 于是 $\mu_A(B)$=O. 由此可知 $\mu_B|\mu_A$(第二章第二讲引理 4.2). 同理 $\mu_A|\mu_B$. 于是, $\mu_A = \mu_B$. 由定理 D.3 可知, $A \sim_s B$. □.

例 D.5 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. 证明*: $A \sim_s A^t$.*

证明. 注意到对任意 $f \in F[t]$, $f(A)^t$=$f(A^t)$. 故

$$\mathrm{rank}(f(A)) = \mathrm{rank}(f(A)^t) = \mathrm{rank}(f(A^t)).$$

由定理 *D.4* 可知, $A \sim_s A^t$. □

例 D.6 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 证明*: 如果存在 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 使得 $A = P^{-1}BP$, 则存在 $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得 $A = Q^{-1}BQ$.*

证明. 因为存在 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 使得 $A = P^{-1}BP$, 所以对任意 $f \in \mathbb{C}[t]$, $\mathrm{rank}(f(A)) = \mathrm{rank}(f(B))$ *(*定理 *D.4*. 特别地, 任意 $g \in \mathbb{R}[t]$, $\mathrm{rank}(g(A)) = \mathrm{rank}(g(B))$. 再由定理 *D.4*, 存在 $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得 $A = Q^{-1}BQ$. □

例 D.7 设 $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. 证明:

$$J_A = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & O & \cdots & O \\ O & J_{d_2}(\lambda_2) & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & J_{d_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

蕴含

$$J_{A^{-1}} = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1^{-1}) & O & \cdots & O \\ O & J_{d_2}(\lambda_2^{-1}) & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & J_{d_k}(\lambda_k^{-1}) \end{pmatrix}.$$

证明. 首先, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 蕴含 A 的特征根非零. 于是, λ_i^{-1} 有意义. 设 $\lambda \in \mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(A)$. 则

$$|\lambda E - A| = 0 \iff |A||\lambda A^{-1} - E| = 0 \iff |\lambda^{-1}E - A^{-1}| = 0.$$

即 $\lambda \in \mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(A) \iff \lambda^{-1} \in \mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(A^{-1})$. 于是, $p_\lambda = t - \lambda$ 是 χ_A 的因子当且仅当 $q_\lambda = t - \lambda^{-1}$ 是 $\chi_{A^{-1}}$ 的因子. 设 $\ell \in \{0, 1, \ldots, n\}$. 则

$$\mathrm{rank}((A - \lambda E)^\ell) = \mathrm{rank}(A^\ell (E - \lambda A^{-1})^\ell) = \mathrm{rank}((\lambda^{-1}E - A^{-1})^\ell).$$

于是, 对任意 $\ell \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $\mathrm{rank}(p_\lambda(A)^\ell) = \mathrm{rank}(q_\lambda(A)^\ell)$. 根据上一讲定理 *11.10*, 对任意 $\lambda \in \mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(A)$, p_λ 在 A 的初等因子组中的重数等于 q_λ 在 A^{-1} 的初等因子组中的重

数. 故对任意 $m \in \mathbb{Z}^+$, $J_m(\lambda)$ 出现在 J_A 中的重数等于 $J_m(\lambda^{-1})$ 出现在 $J_{A^{-1}}$ 中的重数. $\square$

注解 D.8 上述例子说明: 如果 $\mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(A)=\{1,-1\}$, 则 $A\sim_s A^{-1}$.