第一章　空间与形式

2　线性映射

符号约定. 在本节中 V, W 是域 F 上的两个线性空间. 它们中的零向量分别记为 $\mathbf{0}_V$ 和 $\mathbf{0}_W$.

2.1　定义与例子

定义 2.1 设 $\phi : V \longrightarrow W$. 如果对任意的 $\alpha, \beta \in F$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ 都有 $\phi(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha\phi(\mathbf{u}) + \beta\phi(\mathbf{v})$, 则称 ϕ 是从 V 到 W 的线性映射.

上学期讲的关于线性映射的性质对抽象的线性映射仍成立. 特别地, 线性映射的核和像都是子空间.

命题 2.2 设 $\phi : V \longrightarrow W$ 是线性映射. 则 ϕ 是单射当且仅当 $\ker(\phi) = \{\mathbf{0}_V\}$.

证明. 见上学期第二章命题 5.14. □

例 2.3 以下线性映射是常用的.

$$\text{零映射}: \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & W \\ \mathbf{v} & \mapsto & \mathbf{0}_W. \end{array} \qquad \text{恒同映射}: \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V \\ \mathbf{v} & \mapsto & \mathbf{v} \end{array}.$$

设 V 是 W 的子空间.

$$\begin{array}{rccc} \text{嵌入映射:} & V & \longrightarrow & W \\ & \mathbf{v} & \mapsto & \mathbf{v}. \end{array}.$$

设 ϕ 是从 V 到 W 的线性映射, U 是 V 的子空间. 则限制映射:

$$\begin{array}{rccc} \phi_U & U & \longrightarrow & W \\ & \mathbf{u} & \mapsto & \phi(\mathbf{u}) \end{array}$$

也是线性映射.

例 2.4 设 $V = F^n$ 和 $W = F^m$. 则 $\phi : V \longrightarrow W$ 是线性映射当且仅当存在 $A \in F^{m\times n}$ 使得

$$\phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \quad \text{其中 } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots, \\ x_n \end{pmatrix}.$$

例 2.5 设 $V = \mathrm{M}_n(F)$ 和 $W = F$. 令

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{tr}: & \mathrm{M}_n(F) & \longrightarrow & F \\ & A & \mapsto & \mathrm{tr}(A) \end{array}$$

是线性映射. 验证如下. 设

$$\alpha, \beta \in F, \quad A = (a_{i,j})_{n\times n}, \quad B = (b_{i,j})_{n\times n},$$

其中 $a_{i,j}, b_{i,j} \in F$. 则 $\alpha A + \beta B = (\alpha a_{i,j} + \beta b_{i,j})$. 于是,

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\alpha A + \beta B) &= \sum_{i=1}^{n} (\alpha a_{i,i} + \beta b_{i,i}) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \beta \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} \\ &= \alpha \operatorname{tr}(A) + \beta \operatorname{tr}(B).\end{aligned}$$

于是, tr 是线性的. 但 $\det : \mathrm{M}_n(F) \longrightarrow F$ 不是线性的.

例 2.6 设 $V = F[x]$ 和 $h \in F[x] \setminus \{0\}$. 令

$$\begin{array}{rccc}\phi_h : & F[x] & \longrightarrow & F[x] \\ & f & \mapsto & \operatorname{rem}(f, h, x).\end{array}$$

是线性映射. 验证如下. 设 $\alpha, \beta \in F$, $f, g \in F[x]$. 由多项式除法可知, 存在 $p, q \in F[x]$ 使得

$$f = ph + \phi_h(f) \quad 和 \quad g = qh + \phi_h(g).$$

于是 $\alpha f + \beta g = (\alpha p + \beta q)h + \alpha\phi_h(f) + \beta\phi_h(g)$. 因为 $\deg(\phi_h(f)) < \deg(h)$ 和 $\deg(\phi_h(g)) < \deg(h)$, 所以

$$\deg(\alpha\phi_h(f) + \beta\phi_h(g)) < \deg(h).$$

由余式的唯一性可知

$$\phi_h(\alpha f + \beta g) = \alpha\phi_h(f) + \beta\phi_h(g).$$

根据多项式的除法, 我们有

$$\ker(\phi_h) = \{f \in F[x] \mid h|f\} \quad \text{和} \quad \operatorname{im}(\phi_h) = F[x]_{<\deg(h)}.$$

例 2.7 设 $F = \mathbb{R}$, $V = C^1[a,b]$ 和 $W = C[a,b]$. 则求导 d/dx 是从 V 到 W 的线性映射, 而变上限积分

$$\begin{array}{rccc} \int_a^x: & W & \longrightarrow & V \\ & f(t) & \mapsto & \int_a^x f(t)\,dt \end{array}$$

是线性映射. 直接计算得

$$\ker\left(\frac{d}{dx}\right) = \mathbb{R},\ \operatorname{im}\left(\frac{d}{dx}\right) = C[a,b]$$

和

$$\ker\left(\int_a^x\right) = \{0\},\ \operatorname{im}\left(\int_a^x\right) = \{f \in C^1[a,b] | f(a) = 0\}.$$

2.2 线性映射的运算

令 $\operatorname{Hom}(V,W)$ 是从 V 到 W 的所有线性映射的集合. 它是 $\operatorname{Map}(V,W)$ 的子集. 可直接验证, 对任意的 $\alpha, \beta \in F$, $\phi, \psi \in \operatorname{Hom}(V,W)$, 我们有 $\alpha\phi + \beta\psi \in \operatorname{Hom}(V,W)$ (见上学期第二章定义 6.1和命题 6.2). 于是, $\operatorname{Hom}(V,W)$ 是 $\operatorname{Map}(V,W)$ 的子空间, 故它也是 F 上的线性空间.

再设 U 是另一个 F 上的线性空间. 设 $\phi \in \operatorname{Hom}(U,V)$ 和 $\psi \in \operatorname{Hom}(V,W)$. 则 $\psi \circ \phi \in \operatorname{Hom}(U,W)$. 验证见上学期第二章命题 5.11.

例 2.8 考虑上一讲例 *2.7* 中的两个映射. 我们有

$$\int_a^x \left(\frac{d}{dt}f(t)\right)dt = f(x)-f(a) \quad 和 \quad \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x).$$

命题 2.9 设 $\phi \in \mathrm{Hom}(V,W)$ 是双射. 则 $\phi^{-1} \in \mathrm{Hom}(W,V)$.

证明. 设 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$, $\mathbf{v}_1 = \phi^{-1}(\mathbf{w}_1)$ 和 $\mathbf{v}_2 = \phi^{-1}(\mathbf{w}_2)$. 对任意的 $\alpha_1, \alpha_2 \in F$,

$$\phi(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2) = \alpha_1\phi(\mathbf{v}_1) + \alpha_2\phi(\mathbf{v}_2) = \alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2.$$

于是

$$\phi^{-1}(\alpha_1\mathbf{w}_1+\alpha_2\mathbf{w}_2) = \alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2 = \alpha_1\phi^{-1}(\mathbf{w}_1)+\alpha_2\phi^{-1}(\mathbf{w}_2). \quad \square$$

定义 2.10 如果存在双射 $\phi \in \mathrm{Hom}(V,W)$, 则称 V 和 W 线性同构.

线性同构是等价关系, 其验证过程与验证群同构是等价关系类似.

例 2.11 线性空间 $\mathrm{Hom}(F^n, F^m)$ 与 $F^{m\times n}$ 线性同构. 设

$$\begin{array}{rcl} \Phi: \ \mathrm{Hom}(F^n, F^m) & \longrightarrow & F^{n\times m} \\ \phi & \mapsto & A_\phi \quad (\phi \text{ 在标准基下的矩阵}) \end{array}$$

则 Φ 是双射. 由矩阵运算的定义可知, Φ 是线性同构.

3　基底与维数

在本节中 V 是域 F 上有限生成的线性空间. 由线性组合引理可知, 如果 V 可由 k 个向量生成, 则 V 中任何 $k+1$ 个向量一定线性相关.

3.1　极大线性无关集

定义 3.1 设 $S \subset V$ 是非空集. 设 $M \subset S$ 是线性无关集. 如果对任意 $\mathbf{v} \in S$, $\mathbf{v} \in \langle M \rangle$, 即 $S \subset \langle M \rangle$, 则称 M 是 S 中的一个极大线性无关集.

例 3.2 设 $S = \{x, x^3, 2x^3 + x\} \subset \mathbb{Q}[x]$. 求 S 中所有的极大线性无关组.

解. 注意到次数两两不同的多项式组成的集合是线性无关的. 子集 $S_1 = \{x, x^3\}$ 是线性无关组. 这是因为 $2x^3 + x = 2x^3 + x$. 子集 $S_2 = \{x, 2x^3 + x\}$ 是极大线性无关组. 这是因为 $x^3 = (1/2)(2x^3 + x) - (1/2)x$. 而 $S_3 = \{2x^3 + x, x^3\}$ 也是极大线性无关组. 这是因为 $\alpha(2x^3 + x) + \beta x^3 = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ 蕴含着 $\alpha = 0$, 从而 $\beta = 0$. 故 S_3 是线性无关集. 再注意到 $x = (2x^3 + x) - 2x^3$ 即可.

命题 3.3 设 $S \subset V$ 是非空集. 设 $T \subset S$ 是线性无关集. 再设 $V = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$. 则下述断言成立.

(i) *(可扩充)* S 中有极大线性无关集 M 包含 T, 且

$$\operatorname{card}(M) \le k.$$

(ii) *(等势)* 设 M 和 N 是 S 中两个极大线性无关集. 则 $\operatorname{card}(M) = \operatorname{card}(N)$.

(iii) *(表示唯一)* 设 $M = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s\} \subset S$. 则 M 是 S 中的极大线性无关集当且仅当对任意的 $\mathbf{v} \in S$, 存在唯一的 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in F$ 使得 $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{w}_1 + \cdots + \alpha_s \mathbf{w}_s$.

证明. (i) 和 (ii) 见上学期第二章第二讲命题 2.4. (iii) 是上学期第一章第五讲命题 1.12 (iv) 的直接推论. □

3.2 基底和维数

定义 3.4 线性空间 V 的极大线性无关组称为 V 一组基.

设 B 是 V 的极大线性无关组. 则 V 的维数定义为 $\operatorname{card}(B)$. 如果 $V = \{\mathbf{0}\}$, 其维数定义为 0. 线性空间 V 的维数记为 $\dim_F(V)$ 或 $\dim(V)$.

根据命题 3.3, 线性空间的维数是良定义的.

例 3.5 *(坐标空间)* F^n 的标准基

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

于是 $\dim(F^n) = n$.

例 3.6 *(矩阵空间)* 设 $E_{i,j} \in F^{m\times n}$, 其中在 i 行 j 列处的元素是 1, 而其它处的元素是 0, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2 \ldots, n$. 则 $\{E_{i,j} \,|\, i \in \{1, 2, \ldots, m\}, j \in \{1, 2 \ldots, n\}\}$ 是 $F^{m\times n}$ 的一组基. 于是 $\dim F^{m\times n} = mn$. 下面我们证明 $\mathrm{SM}_n(F)$ 的一组基是

$$S = \{E_{i,i} \,|\, i = 1, 2, \ldots, n\} \cup \{E_{i,j} + E_{j,i} \,|\, 1 \le i < j \le n\}.$$

证明. 可直接验证 $S \subset \mathrm{SM}_n(F)$. 设 $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{SM}_n(F)$. 则 $a_{i,j} = a_{j,i}$. 于是

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} E_{i,i} + \sum_{1\le i<j\le n} a_{i,j}(E_{i,j} + E_{j,i}).$$

如果

$$\sum_{i=1}^{n} b_{i,i} E_{i,i} + \sum_{1\le i<j\le n} b_{i,j}(E_{i,j} + E_{j,i}) = O,$$

其中 $b_{i,i}, b_{i,j} \in F$. 可直接验证所有的 $b_{i,i} = 0$, $b_{i,j} = 0$. 于是 S 是 $\mathrm{SM}_n(F)$ 的一组基. 从而

$$\dim(\mathrm{SM}_n(F)) = n + \binom{n}{2} = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

例 3.7 *(代数空间)* 设 $d \in \mathbb{Z}^+$. 则 $F[x]_{<d}$ 的一组基是 $\{1, x, \ldots, x^{d-1}\}$, 其维数是 d. 此外, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$. 这是因为 $\mathbb{C} = \{a + b\sqrt{-1} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

定理 3.8 *(基扩充定理)* *设 V 是有限维线性空间. 如果 $S \subset V$ 是线性无关集, 则存在 V 的基底 T 使得 $S \subset T$.*

证明. 因为 V 是有限维的, 所以它是有限生成的. 由基底的定义和命题 3.3 直接推出定理. □

定理 3.9 *(线性映射基本定理)* *设 V 的一组基是 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, W 是 F 上的线性空间且 $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n \in W$. 则存在唯一的线性映射 $\phi : V \longrightarrow W$ 使得*

$$\phi(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, \ldots, \phi(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n.$$

证明. 见上学期第二章定理 5.20 的证明. □

定理 3.10 *设 V, W 是 F 上的有限维线性空间. 则 V 和 W 线性同构当且仅当 $\dim(V) = \dim(W)$. 特别地, 当 $\dim_F(V) = n$ 时, V 和 F^n 线性同构.*

证明. 设 $\dim(V) = \dim(W) = n$. 令 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 和 $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ 分别是 V 和 W 的基底. 由定理 3.9 存在线性映射 $\phi : V \longrightarrow W$ 和 $\psi : W \longrightarrow V$ 使得 $\phi(\mathbf{v}_i) = (\mathbf{w}_i)$ 和 $\psi(\mathbf{w}_i) = \mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. 于是, $\psi \circ \phi(\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. 由定理 3.9 的唯一性可知 $\psi \circ \phi$ 是 V 上的恒同映射. 同理, $\phi \circ \psi$ 是 W 上的恒同映射. 于是, ϕ 是线性同构.

反之, 设 V 的一组基是 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, $\phi : V \longrightarrow W$ 是线性同构. 若 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ 使得

$$\alpha_1\phi(\mathbf{v}_1)+\cdots+\alpha_n\phi(\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}_W \implies \phi(\alpha_1\mathbf{v}_1+\cdots+\alpha_n\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}_W.$$

因为 ϕ 是单射, 所以 $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}_V$. 于是,

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0 \implies \phi(\mathbf{v}_1), \ldots \phi(\mathbf{v}_n) \text{ 线性无关.}$$

由定理 3.8 可知, $\dim(W) \geq \dim(V)$. 同理 $\dim(V) \geq \dim(W)$. 于是, $\dim(V) = \dim(W)$. □

3.3 若干维数公式

命题 3.11 *(i)* 设 U 是 V 的子空间, 则 $U \neq V$ 当且仅当 $\dim(U) < \dim(V)$.

(ii) 设 V_1, V_2 是 V 的子空间. 则

$$\dim(V_1) + \dim(V_2) = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2).$$

(iii) 设 $\phi : V \longrightarrow W$ 是线性映射. 则

$$\dim(\ker(\phi)) + \dim(\mathrm{im}(\phi)) = \dim(V).$$

证明. 与上学期相关证明类似. (i) 和 (ii) 分别见上学期讲义 6 中的命题 2.14 和 2.15. (iii) 见上学期讲义 8 中定理 5.17. □

命题 3.12 设 $V_1, \ldots, V_k$ 是 V 的子空间. 则

$$\dim(V_1 + \cdots + V_k) \leq \dim(V_1) + \cdots + \dim(V_k).$$

等号成立当且仅当 $V_1 + \cdots + V_k$ 是直和.

证明. 我们对 k 归纳证明不等式. 当 $k = 1$ 时不等式显然成立. 设 $k > 1$ 且不等式对 $k - 1$ 成立. 则

$$\begin{aligned}
&\dim(V_1 + V_2 + \cdots + V_k) \\
&= \dim(V_1) + \dim(V_2 + \cdots + V_k) \\
&- \dim(V_1 \cap (V_2 + \cdots + V_k)) \quad (\text{命题 } 3.11 \text{ (ii)}) \\
&\leq \dim(V_1) + \dim(V_2 + \cdots + V_k) \\
&\leq \dim(V_1) + \dim(V_2) + \cdots + \dim(V_k). \quad (\text{归纳假设})
\end{aligned}$$

设 $V_1 + \cdots + V_k$ 是直和. 对 k 归纳. 当 $k = 1$ 时显然.

设 $k>1$ 且 $k-1$ 时结论成立.

$$\begin{aligned}
&\dim(V_1+V_2+\cdots+V_k)\\
&=\dim(V_1)+\dim(V_2+\cdots+V_k)\\
&\quad-\dim(V_1\cap(V_2+\cdots+V_k)) && (\text{命题 } 3.11\text{ (ii)})\\
&=\dim(V_1)+\dim(V_2+\cdots+V_k) && (\text{定理 } 1.12\text{ (iii)})\\
&=\dim(V_1)+\dim(V_2)+\cdots+\dim(V_k). && (\text{归纳假设})
\end{aligned}$$

反之, 设 $\dim(V_1+\cdots+V_k)=\dim(V_1)+\cdots+\dim(V_k)$. 我们要证明 $V_1+\cdots+V_k$ 是直和. 假设不是直和. 由定理 1.12 (iii), 存在 $i\in\{1,\ldots,k\}$ 使得

$$V_i\cap(V_1+\cdots+V_{i-1}+V_{i+1}+\cdots+V_n)\neq\{\mathbf{0}\}.$$

不妨设 $i=1$. 则

$$\begin{aligned}
&\dim(V_1+V_2+\cdots+V_k)\\
&=\dim(V_1)+\dim(V_2+\cdots+V_k)\\
&-\dim(V_1\cap(V_2+\cdots+V_k)) \quad (\because \text{命题 } 3.11\text{ (ii)})\\
&<\dim(V_1)+\dim(V_2+\cdots+V_k) \quad (\because V_1\cap(V_2+\cdots+V_k)\neq\{\mathbf{0}\})\\
&\leq\dim(V_1)+\dim(V_2)+\cdots+\dim(V_k). \quad (\because \text{刚证的不等式})
\end{aligned}$$

矛盾. □

4 坐标变换

在本节中 V 是域 F 上的 n 维线性空间.

定义 4.1 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 是 V 的一组基. 对任意的 $\mathbf{x} \in V$, 存在唯一的 $x_1, \ldots, x_n \in F$ 使得

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

称 $(x_1, \ldots, x_n)^t$ 是 $\mathbf{x}$ 在基底 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 的坐标.

坐标的存在唯一性由 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 的线性无关性可得.

定理 4.2 设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基, $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n \in V$. 则 $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ 是 V 的一组基当且仅当存在唯一的 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得

$$(\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)P. \tag{1}$$

(称 P 是从基底 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 到基底 $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ 的转换矩阵).

证明. 设 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得 (1) 成立. 若 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ 使得

$$\alpha_1\mathbf{e}'_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}'_n = \mathbf{0}.$$

则

$$(\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n)\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)P\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

因为 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 线性无关, 所以

$$P\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

因为 P 满秩, 所以 $\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0$. 于是 $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ 线性无关. 因为 $\dim(V)=n$, 所以 $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ 是 V 的一组基.

反之, 设 $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ 是 V 的一组基. 因为 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基, 所以存在 $P \in \mathrm{M}_n(F)$ 使得 (1) 成立. 我们首先证明 P 可逆. 否则, P 不满秩, 从而存在 $\beta_1, \ldots, \beta_n \in F$, 不全为零, 使得

$$P\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

由 (1),

$$\beta_1\mathbf{e}'_1+\cdots+\beta_n\mathbf{e}'_n=\mathbf{0},$$

即 $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ 线性相关. 矛盾. 于是 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$. 再设 $Q \in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得

$$(\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n)=(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)Q.$$

则 $(\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0})=(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)(P-Q)$. 由 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 的线性无关性可知 $P-Q=O$, 即 $P=Q$. 唯一性成立. □

定理 4.3 设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 和 $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ 是 V 的两组基, P 从第一组基到第二组的转换矩阵. 设 $\mathbf{x} \in V$ 在这两组基下的坐标分别是 $(x_1, \ldots, x_n)^t$ 和 $(x'_1, \ldots, , x'_n)^t$. 则

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

证明. 我们计算

$$\mathbf{x} = (\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n) \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) P \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

由坐标的唯一性可知

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad \square$$

例 4.4 设 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的标准基. 证明

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

也是一组基. 设 $\mathbf{x} = (5, 1)^t$. 求 $\mathbf{x}$ 在 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 下的坐标.

证明. 通过矩阵表示, 我们有

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{P}.$$

因为 A 可逆, 所以由定理 *4.2* 可知, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 是基. 计算得

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

再根据定理 *4.3*, $\mathbf{x}$ 在 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 下的坐标是

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

例 4.5 判断 $p_1 = x(x-1), p_2 = x(x-2), p_3 = x(x-2)+1$ 在 $F[x]_{<3}$ 中 是不是一组基.

解. 因为 $p_1 = x^2 - x$, $p_2 = x^2 - 2x$, $p_3 = x^2 - 2x + 1$, 所以

$$(p_1, p_2, p_3) = (1, x, x^2) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P}.$$

因为 $\det(P) = 1 \neq 0$, 所以 A 可逆. 由定理 *4.2*, p_1, p_2, p_3 是一组基.

例 4.6 在 $\mathbb{Q}^3$ 中: 设

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(i) 证明: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 是 $V := \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$ 的一组基.

(ii) 令 $\mathbf{w} = (3,2,2)^t$, 判断 $\mathbf{w}$ 是否在 V 中. 如果在计算 $\mathbf{w}$ *(*做为 V 中的向量*)*在 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 的下的坐标.

解. *(i)* 设 $A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. 则

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因为 $\operatorname{rank}(A) = 2$, 所以 $\dim(V) = 2$. 因为 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 线性无关, 所以 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 是 V 的一组基.

(ii) 设 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Q}$ 使得 $\mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2$. 则

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 3 \\ 2\alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 2 \end{cases} \Longrightarrow \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2.$$

故 $\mathbf{w} \in V$ 且它在 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 下的坐标是 $(1,2)$. 换言之,

$$\mathbf{w} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$