上述定理的矩阵版如下.

推论 8.4 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. 则存在 $k, \ell \in \mathbb{N}$ 使得

$$A \sim_c \begin{pmatrix} E_k & O & O \\ O & -E_\ell & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

且 $k + \ell = \mathrm{rank}(q)$. 进而, 如果

$$A \sim_c \begin{pmatrix} E_s & O & O \\ O & -E_t & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

则 $k = s$ 和 $t = \ell$.

利用上述推论中的记号, 我们由如下定义.

定义 8.5 称 k 是 A 的正惯性指数, ℓ 是 A 的负惯性指数, (k, ℓ) 是 A 的签名.

推论 8.6 设 $A, B \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. 则 $A \sim_c B$ 当且仅当 A 和 B 有共同的签名.

证明. 设 A 的签名是 (k, ℓ), B 的签名是 (s, t).

如果 $A \sim_c B$, 则由 $\sim_c$ 的传递律和对称律得出

$$A \sim_c \begin{pmatrix} E_k & O & O \\ O & -E_\ell & O \\ O & O & O \end{pmatrix} \Longrightarrow B \sim_c \begin{pmatrix} E_k & O & O \\ O & -E_\ell & O \\ O & O & O \end{pmatrix}.$$

根据推论 8.4, (k, ℓ) 也是 B 的签名.

反之，设 $(k, \ell) = (s, t)$. 则

$$A \sim_c \begin{pmatrix} E_k & O & O \\ O & -E_\ell & O \\ O & O & O \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad B \sim_c \begin{pmatrix} E_k & O & O \\ O & -E_\ell & O \\ O & O & O \end{pmatrix}.$$

因为 $\sim_c$ 是等价关系, 所以 $A \sim_c B$. $\square$

例 8.7 计算 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SM}_3(\mathbb{R})$ 的签名.

解. 利用行列消元

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

故 A 的签名是 $(2, 1)$.

8.2 （半）正定二次型

定义 8.8 设 q 是 V 上的二次型.

(i) 如果对于任意 $\mathbf{x} \in V$, $q(\mathbf{x}) \geq 0$, 则称 q 是半正定的 *(semi-positive definite)*;

(ii) 如果对于任意 $\mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, $q(\mathbf{x}) > 0$, 则称 q 是正定的 *(positive definite)*;

(iii) 如果对于任意 $\mathbf{x} \in V$, $q(\mathbf{x}) \leq 0$, 则称 q 是半负定的 *(semi-negative definite)*;

(iv) 如果对于任意 $\mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, $q(\mathbf{x}) < 0$, 则称 q 是负定的 *(negative definite)*;

(v) 如果 q 既不是半正定也不是半负定的, 则称 q 是不定的 *(indefinite)*.

设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$, q_A 是 $\mathbb{R}^n$ 上在标准基下矩阵为 A 的二次型. 如果 q_A 是半正定(正定的, 半负定的, 负定的, 不定的), 则称 A 是半正定(正定的, 半负定的, 负定的, 不定的).

命题 8.9 设 $\dim(V) = n$ 且 q 是 V 上的二次型. 它的签名是 (k, ℓ).

(i) q 是半正定的当且仅当 $\ell = 0$;

(ii) q 是正定的当且仅当 $k = n$;

(iii) q 是半负定的当且仅当 $k = 0$;

(iv) q 是负定的当且仅当 $\ell = n$;

(v) q 是不定的当且仅当 $k > 0$ 且 $\ell > 0$.

证明. 设 q 在规范基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的规范型是

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+\ell}^2,$$

其中 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$ 是 V 中的任意向量.

(i) 若 $\ell = 0$, 则 $q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \cdots + x_k^2 \geq 0$. 即 q 半正定. 反之, 假设 $\ell > 0$. 令 $\mathbf{x} = \mathbf{e}_{k+1}$. 则 $q(\mathbf{x}) = -1 < 0$. 矛盾. 故 $\ell = 0$.

(ii) 若 $k = n$, 则 $q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$. 于是, 当 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 时, $q(\mathbf{x}) > 0$, 即 q 正定. 反之, 假设 $k < n$. 令 $\mathbf{x} = \mathbf{e}_n$. 则 $q(\mathbf{e}_n) = 0$. 于是 q 不是正定的. 矛盾.

(iii) 与 (i) 类似.

(iv) 与 (ii) 类似.

(v) 排除 (i), (iii) 情形即可. □

注解 8.10 半正定, 正定, 半负定, 负定和不定二次型分别有下列规范型

$$x_1^2+\cdots+x_k^2, \quad x_1^2+\cdots+x_n^2, \quad -x_1^2-\cdots-x_\ell^2, \quad -x_1^2-\cdots-x_n^2,$$

和

$$x_1^2+\cdots+x_k^2-x_{k+1}^2-\cdots-x_{k+\ell}^2,$$

在最后的规范型中 $k>0,\ell>0$.

类似地, 我们有

命题 8.11 设 $A\in\mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. 它的签名是 (k,ℓ).

(i) A 是半正定的当且仅当 $\ell=0$;

(ii) A 是正定的当且仅当 $k=n$;

(iii) A 是半负定的当且仅当 $k=0$;

(iv) A 是负定的当且仅当 $\ell=n$;

(v) A 是不定的当且仅当 $k>0$ 且 $\ell>0$.

例 8.12 证明 $(a)\in\mathrm{M}_1(\mathbb{R})$ 是正定的当且仅当 $a>0$. 判定

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$$

是不是正定的.

证明. 矩阵 (a) 对应 $\mathbb{R}$ 上的二次型 $q(x)=ax^2$. 而 q 正定当且仅当 $a>0$.

利用行列相伴变换可得

$$A \sim_c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow A \text{ 的签名是 } (1,1).$$

于是 A 是不定的.

例 8.13 设 $p, q \in \mathcal{Q}(V)$是半正定的. 证明 $p+q$ 也是半正定的; 若上述 p, q 中还有一个是正定的, 则 $p+q$ 也是正定的.

证明. 设 p, q 是半正定的. 则对任意的 $\mathbf{x} \in V$, $p(\mathbf{x}) \geq 0$, $q(\mathbf{x}) \geq 0$. 于是

$$(p+q)(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x}) \geq 0.$$

再设 p 是正定的. 则对于任意的 $\mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, $p(\mathbf{x}) > 0$. 于是

$$(p+q)(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x}) > 0. \quad \square$$

类似地可证明下列结论.

注解 8.14 设 $A, B \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 是半正定的, 则 $A+B$ 也是半正定的; 进一步设 A, B 中还有一个是正定的, 则 $A+B$ 也是正定的.

设 $q \in \mathcal{Q}(V)$. 定义

$$C_q = \{\mathbf{v} \in V \mid q(\mathbf{v}) = 0\}.$$

称 C_q 为 q 确定的锥面(cone).

例 8.15 设 $q \in \mathcal{Q}(V)$. 证明 C_q 是 V 的子空间当且仅当 q 是半正定或半负定的.

证明. 设 q 的签名是 (k, ℓ).

设 C_q 是 V 中的子空间. 如果 $k > 0$ 且 $\ell > 0$. 根据惯性定理 q 在 V 的某组基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的规范型是 $q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 + \cdots + x_{k+\ell}^2$, 其中 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_k\mathbf{e}_k + x_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$. 于是 $q(\mathbf{e}_k + \mathbf{e}_{k+1}) = 1 - 1 = 0$ 且 $q(\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_{k+1}) = 0$. 由此可知

$$\mathbf{e}_k+\mathbf{e}_{k+1}, \mathbf{e}_k-\mathbf{e}_{k+1} \in C_q \implies 2\mathbf{e}_k \in C_q \implies q(2\mathbf{e}_k) = 0 \implies 4 = 0.$$

矛盾. 于是 $k = 0$ 或 $\ell = 0$. 即 q 是半负定或半正定的.

反之, 不妨设 q 是半正定的. 根据惯性定理 q 在 V 的某组基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的规范型是

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \cdots + x_k^2.$$

设 $U = \langle \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$. 则 $U \subset C_q$. 设 $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + \cdots + v_n\mathbf{e}_n \in C_q$. 则

$$q(\mathbf{v}) = v_1^2 + \cdots + v_k^2 = 0.$$

因为 $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}$, 所以 $v_1 = \cdots = v_k = 0$. 于是

$$\mathbf{v} = v_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + \cdots + v_n\mathbf{e}_n \in U,$$

即 $C_q \subset U$. 综上所述, $U = C_q$. □

8.3 （半）正定矩阵的等价条件

实数域的一个基本性质是：设 $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. 则

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0; \quad x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0 \Longrightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0.$$

这个性质的矩阵版如下: 设

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \ \mathbf{x}^t\mathbf{x} \geq 0; \quad \mathbf{x}^t\mathbf{x} = 0 \Longrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

引理 8.16 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 则 $A^tA \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$, 半正定且 $\mathrm{rank}(A^tA) = \mathrm{rank}(A)$.

证明. 计算 $(A^tA)^t = A^t(A^t)^t = A^tA$ 得出 $A^tA \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$.

设 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} = A\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. 则

$$\mathbf{x}^t(A^tA)\mathbf{x} = \mathbf{y}^t\mathbf{y} \geq 0.$$

故 A^tA 半正定.

设 U, V 是分别是以 A 和 A^tA 为系数的齐次线性方程组的解空间. 则 $U \subset V$. 反之, 设 $\mathbf{x} \in V$. 则

$$A^tA\mathbf{x} = \mathbf{0}_n \in \mathbb{R}^n.$$

于是, $\mathbf{y}^t\mathbf{y} = 0$. 由此得出 $\mathbf{y} = \mathbf{0}_m \in \mathbb{R}^m$, 即 $\mathbf{x} \in U$. 由此得出 $U = V$. 特别地, $\dim(U) = \dim(V)$. 由方程组版的对偶定理, $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^tA)$. $\square$

定理 8.17 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. 则

(i) A 半正定当且仅当存在 $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 使得 $A = B^t B$.

(ii) A 正定当且仅当存在 $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得 $A = B^t B$.

证明. (i) 设 A 半正定. 则由矩阵版的惯性定理存在 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得

$$P^t A P = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

其中 $r = \mathrm{rank}(A)$, 也是 A 的正惯性指数. 于是

$$A = \left(P^{-1}\right)^t \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1} = \left(P^{-1}\right)^t \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1}}_{B} = B^t B.$$

反之, 根据引理 8.16, $A = B^t B$ 是半正定的.

(ii) 设 A 正定. 则由矩阵版的惯性定理存在 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得 $P^t A P = E_n$. 于是, $A = \left(P^{-1}\right)^t P^{-1}$. 反之, 根据引理 8.16, $A = B^t B$ 是半正定的. 因为 B 可逆, 所以 A 满秩. 于是, A 的正惯性指数等于 n. □

例 8.18 设 A 是正定矩阵. 证明 $\det(A) > 0$ 且 A^{-1} 也正定.

证明. 由上述定理 *(ii)*, $A = P^t P$, 其中 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. 则 $\det(A) = \det(P)^2 > 0$, 且

$$A^{-1} = (P^t P)^{-1} = P^{-1} \left(P^t\right)^{-1} = P^{-1} \left(P^{-1}\right)^t.$$

再由上述定理 *(ii)*, A^{-1} 正定. $\square$