第一章　空间与形式

8.4　Jacobi 公式与正定矩阵

设 $A \in \mathrm{M}_n(F)$. 矩阵 A 的子式

$$M\begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_k \\ i_1, i_2, \ldots, i_k \end{pmatrix},$$

其中 $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$, 称为 A 的一个 k 阶主子式. 特别地,

$$M\begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, k \\ 1, 2, \ldots, k \end{pmatrix}$$

称为 A 的 k 阶顺序主子式.

例 8.18 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}.$$

矩阵 A 的顺序主子式是 $a_{1,1}$, $\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ 和 $\det(A)$.

定理 8.19 *(Jacobi 公式)* 设 $A \in \mathrm{SM}_n(F)$. 设 $\Delta_0 = 1$, Δ_i 是 A 的 i 阶顺序主子式. 如果 $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ 都非零, 则

$$A \sim_c \operatorname{diag}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \ldots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right).$$

证明. 设 $A=(a_{i,j})_{n\times n}$. 对 n 归纳. 当 $n=1$ 时, $a_{1,1}=\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0}\right)$. 结论成立. 设 $n>1$ 且 $n-1$ 时结论成立. 设 B 是由 A 的前 $(n-1)$ 行和 $(n-1)$ 列元素组成的子矩阵. 则 B 对称且它的 $n-1$ 个顺序主子式是 $\Delta_1,\ldots,\Delta_{n-1}$. 由归纳假设可知

$$B\sim_c \underbrace{\operatorname{diag}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0},\frac{\Delta_2}{\Delta_1},\ldots,\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}\right)}_{C}.$$

于是存在 $P\in\mathrm{GL}_{n-1}(F)$ 使得 $P^tBP=C$. 令

$$Q=\begin{pmatrix} P & O_{(n-1)\times 1}\\ O_{1\times(n-1)} & 1\end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \mathbf{v}=\begin{pmatrix} a_{1,n}\\ \vdots \\ a_{n-1,n}\end{pmatrix}.$$

则

$$\begin{aligned}Q^tAQ&=\begin{pmatrix} P^t & O_{(n-1)\times 1}\\ O_{1\times(n-1)} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & \mathbf{v}\\ \mathbf{v}^t & a_{n,n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & O_{(n-1)\times 1}\\ O_{1\times(n-1)} & 1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix} C & \mathbf{w}\\ \mathbf{w}^t & a_{n,n}\end{pmatrix},\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{w} = P^t\mathbf{v}$. 对 Q^tAQ 用初等行伴列变换并注意到 C 对称, 我们得到

$$\begin{pmatrix} E_{n-1} & O_{(n-1)\times 1} \\ -\mathbf{w}^t\left(C^{-1}\right)^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & \mathbf{w} \\ \mathbf{w}^t & a_{n,n} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} E_{n-1} & -C^{-1}\mathbf{w} \\ O_{1\times(n-1)} & 1 \end{pmatrix}}_{R}$$

$$= \begin{pmatrix} C & \mathbf{w} \\ O_{1\times(n-1)} & \lambda \end{pmatrix} R, \quad \text{其中 } \lambda \text{ 是 } F \text{ 中某个元素,}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} C & O_{(n-1)\times 1} \\ O_{1\times(n-1)} & \alpha \end{pmatrix}}_{M}, \quad \text{其中 } \alpha \text{ 是 } F \text{ 中某个元素.}$$

最后, 我们来验证 $\alpha = \Delta_n/\Delta_{n-1}$. 由上述推导得出

$$C = P^tBP \quad \text{和} \quad M = R^tQ^tAQR.$$

因为 $\det(C) = \Delta_{n-1} = \det(B)$, 所以由上述第一个等式蕴含 $\det(P)^2 = 1$. 而上述第二个等式蕴含

$$\Delta_{n-1}\alpha = \Delta_n \det(P)^2 \implies \alpha = \Delta_n/\Delta_{n-1}. \quad \square$$

定理 8.20 *设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. 设 Δ_k 是 A 的 k 阶顺序主子式, $k = 1, 2, \ldots, n$. 则下列命题等价.*

(i) A 正定;

(ii) A 的任何 k 阶主子式都大于零;

(iii) $\Delta_1 > 0$, ..., $\Delta_n > 0$.

证明. (i) $\Longrightarrow$ (ii) 设 B 是由 A 中第 $i_1,\dots,i_k$ 行和 $i_1,\dots,i_k$ 列构成的子矩阵. 其中 $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$. 令 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 对任意 $j \in \{1,2,\dots,n\} \setminus \{i_1,i_2,\dots,i_k\}$, 第 j 个坐标等于零, 第 i_ℓ 个坐标等于 x_{i_ℓ}, $\ell = 1,2,\dots,k$. 再令 $\mathbf{y} = (x_{i_1},\dots,x_{i_k})^t$. 假设 $\mathbf{y} \ne \mathbf{0}_k$. 则 $\mathbf{x} \ne \mathbf{0}_n$. 于是

$$0 < \mathbf{x}^t A\mathbf{x} = \mathbf{y}^t B\mathbf{y}.$$

由 $\mathbf{y}$ 的任意性可知, B 正定. 根据上例, $\det(B) > 0$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) 显然.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) 由 Jacobi 公式,

$$A \sim_c \operatorname{diag}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right),$$

其中 $\Delta_0 = 1$. 于是 A 合同于一个对角矩阵, 其对角线上的元素都是正实数. 于是 A 的正惯性指数等于 n. □

例 8.21 设

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

问 λ 为何值时 A 是正定的, A 是负定的?

解. A 的三个顺序主子式分别是

$$\Delta_1 = \lambda,\ \Delta_2 = \det\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2-1,\ \Delta_3 = \det(A) = (\lambda-1)^2(\lambda+2).$$

A 正定当且仅当 $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ 且 $\Delta_3 > 0$. 即 $\lambda > 1$.

A 负定当且仅当 $-A$ 正定. 而 $-A$ 的三个主子式是

$$\Omega_1 = -\lambda, \quad \Omega_2 = \lambda^2 - 1, \quad \Omega_3 = \det(A) = -(\lambda-1)^2(\lambda+2).$$

A 负定当且仅当 $\Omega_1 > 0$, $\Omega_2 > 0$ 且 $\Omega_3 > 0$. 即 $\lambda < -2$.

8.5 Hadamard 不等式

例 8.22 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 正定. 证明 $\det(A)$ 不大于 A 的对角线上元素之积.

证明. 设 $A = (a_{i,j})$. 对 n 归纳. 当 $n = 1$ 时, $A = (a_{1,1})$. 于是 $\det(A) = a_{1,1}$. 结论成立. 设 $n > 1$ 且 $n-1$ 时结论成立. 把 A 分块为

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \mathbf{v} \\ \mathbf{v}^t & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

由定理 *8.20 (i)* $\Longrightarrow$ *(ii)* 的证明可知, A_{n-1} 正定. 于是 $\det(A_{n-1}) \le a_{1,1} \cdots a_{n-1,n-1}$. 令

$$P = \begin{pmatrix} E_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}\mathbf{v} \\ O_{1\times(n-1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

则

$$P^tAP = \begin{pmatrix} A_{n-1} & O_{(n-1)\times 1} \\ O_{1\times(n-1)} & a_{n,n} - \underbrace{\mathbf{v}^t A_{n-1}^{-1}\mathbf{v}}_{\alpha} \end{pmatrix}.$$

因为 $\det(P)=1$, 所以上式两边取行列式得

$$\det(A)=\det(A_{n-1})(a_{n,n}-\alpha).$$

因为 A_{n-1} 正定, 所以 A_{n-1}^{-1} 正定(见例 **??**). 于是 $\alpha \geq 0$. 由上式和归纳假设得

$$\det(A) \leq a_{1,1}\cdots a_{n-1,n-1}a_{n,n}. \quad \square$$

例 8.23 *(Hadamard 不等式)* 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 证明:

$$|\det(A)| \leq \sqrt{\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2} \quad \text{和} \quad |\det(A)| \leq \sqrt{\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2}.$$

证明. 不妨设 $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. 令 $M = A^tA$. 由定理 **??** *(ii)* 可知 M 正定. 设 $M=(m_{i,j})$. 则由上例得到

$$\det(M) \leq m_{1,1}\cdots m_{n,n}.$$

注意到 $m_{i,i}=\sum_{j=1}^n a_{j,i}^2$. 所以 $\det(A)^2=\det(M)\leq \prod_{i=1}^n m_{i,i} = \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i}^2$. 由此证明了第二个不等式. 令 $M=AA^t$. 我们可以证明第一个不等式. $\square$

9 二次曲线和曲面的仿射分类

9.1 仿射变换

在本小节中, F 是任意的域, V 是域 F 上的线性空间.

定义 9.1 设 $\phi: V \longrightarrow V$ 是线性(自)同构, $\mathbf{v} \in V$ 是一个固定的向量. 映射

$$\begin{aligned} \rho: V &\longrightarrow V \\ \mathbf{x} &\mapsto \phi(\mathbf{x}) + \mathbf{v} \end{aligned}$$

称为 V 上一个由 ϕ 和 $\mathbf{v}$ 定义的仿射变换 *(affine transformation)*, 其中 $\mathbf{v}$ 称为 ρ 的平移向量.

当 ϕ 是恒同映射是, ρ 称为平移变换 (translation).

命题 9.2 *(i)* 设 ρ_1, ρ_2 是 V 上两个仿射变换. 则 $\rho_2 \circ \rho_1$ 也是仿射变换.

(ii) 仿射变换可逆，且其逆也是仿射变换.

证明. (i) 设 ρ_i 由线性同构 ϕ_i 和平移向量 $\mathbf{v}_i$ 定义, $i = 1, 2$. 再设 $\mathbf{x} \in V$. 则

$$\rho_2 \circ \rho_1(\mathbf{x}) = \rho_2(\phi_1(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_1) = \phi_2(\phi_1(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_1) + \mathbf{v}_2 = \phi_2 \circ \phi_1(\mathbf{x}) + \phi_2(\mathbf{v}_1) + \mathbf{v}_2.$$

于是 $\rho_2 \circ \rho_1$ 是由线性同构 $\phi_2 \circ \phi_1$ 和平移向量 $\phi_2(\mathbf{v}_1) + \mathbf{v}_2$ 定义的仿射变换.

(ii) 设 ρ 是由线性同构 ϕ 和平移向量 $\mathbf{v}$ 定义的仿射变换. 根据 (i) 的证明, 我们令 σ 是由 ϕ^{-1} 和 $-\phi^{-1}(\mathbf{v})$ 定义的仿射变换. 对任意的 $\mathbf{x} \in V$,

$$\sigma \circ \rho(\mathbf{x}) = \sigma(\phi(\mathbf{x}) + \mathbf{v}) = \phi^{-1}(\phi(\mathbf{x}) + \mathbf{v}) - \phi^{-1}(\mathbf{v}) = \mathbf{x} + \phi^{-1}(\mathbf{v}) - \phi^{-1}(\mathbf{v}) = \mathbf{x}.$$

类似地,

$$\rho\circ\sigma(\mathbf{x})=\rho(\phi^{-1}(\mathbf{x})-\phi^{-1}(\mathbf{v}))=\phi(\phi^{-1}(\mathbf{x})-\phi^{-1}(\mathbf{v}))+\mathbf{v}=\mathbf{x}-\mathbf{v}+\mathbf{v}=\mathbf{x}.$$

于是, $\rho^{-1}=\sigma$. □

注解 9.3 上述命题说明 V 上的所有仿射变换关于 $\circ$ 构成群.

例 9.4 在这个例子中我们研究 $\mathbb{R}^n$ 上的仿射变换. 在标准基下 $\mathbb{R}^n$ 中每个向量是由 n 个坐标的列向量, 每个线性同构对应一个唯一的可逆矩阵. 于是仿射变换 ρ 可以具体的表示为

$$\begin{array}{rccc}\rho: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}\end{array}$$

其中 $A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $v_1,\ldots,v_n$ 是固定的实数.

考虑函数 $f(x_1,\ldots,x_n):\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$. 在微积分中我们经常做变量替换把 f 变为另一种形式. 变量替换是一个从

$\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的可逆映射

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} y_1(x_1,\ldots,x_n) \\ \vdots \\ y_n(x_1,\ldots,x_n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

仿射变换是一种特殊的变量替换. 利用变量替换化简函数可以用下列交换图直观地表示

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "g"] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R}, \end{tikzcd}$$

其中 $g = f \circ T(x_1,\ldots,x_n) = f(y_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,y_n(x_1,\ldots,x_n))$. 我们对函数 g 的知识可以通过同构 $f = g \circ T^{-1}$ 转换到成关于 f 的知识. 当然我们可能需要经过多次变换替换才能达到目的. 此时交换图表示为

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "T_1\circ\cdots\circ T_k"] \arrow[dr, "g"] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R}. \end{tikzcd}$$

9.2 二次曲面

引理 9.5 设 $p \in \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$ 的次数等于 2, 其齐 2 次部分记为 h_2. 把 p 看成从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数, h_2 看成相应的二

次型. 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上的仿射变换 ρ 使得

$$\begin{aligned} p\circ\rho: \qquad \mathbb{R}^n \qquad &\longrightarrow \ \mathbb{R} \\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad &\mapsto \quad \begin{aligned} &x_1^2+\cdots+x_k^2-x_{k+1}^2-\cdots-x_{k+\ell}^2 \\ &-\lambda x_{k+\ell+1}-\mu, \end{aligned} \end{aligned}$$

其中 (k,ℓ) 是 h_2 的签名, $\lambda\in\{0,1\}$ 且 $\mu\in\mathbb{R}$.

证明. 设 $p=h_2+h_1+h_0$ 是 p 的加法分解. 则

$$p(\mathbf{x})=\mathbf{x}^tA\mathbf{x}+h_1(\mathbf{x})+h_0,$$

其中 $A\in\mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. 由惯性定理(矩阵版)可知, 存在 $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得

$$P^tAP=\begin{pmatrix} E_k & O & O \\ O & -E_\ell & O \\ O & O & O \end{pmatrix} \tag{1}$$

. 设 $\rho_1:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ 由公式 $\rho_1(\mathbf{x})=P\mathbf{x}$ 给出. 则

$$\begin{aligned} p\circ\rho_1(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^tP^tAP\mathbf{x}+h_1(P\mathbf{x})+h_0 \\ &\overset{(1)}{=} x_1^2+\cdots+x_k^2-x_{k+1}^2-\cdots-x_{k+\ell}^2 \\ &\quad+2\alpha_1x_1+\cdots+2\alpha_nx_n+h_0, \end{aligned}$$

其中 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. 通过配方得

$$\begin{aligned} p \circ \rho_1(\mathbf{x}) = {} & (x_1 + \alpha_1)^2 + \cdots + (x_k + \alpha_k)^2 \\ & - (x_{k+1} - \alpha_{k+1})^2 - \cdots - (x_{k+\ell} - \alpha_{k+\ell})^2 \\ & + 2\alpha_{k+\ell+1} x_{k+\ell+1} + \cdots + 2\alpha_n x_n + \xi, \end{aligned}$$

其中 $\xi \in \mathbb{R}$. 考虑平移变换

$$\begin{aligned} \rho_2 : \quad \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_{k+\ell} \\ x_{k+\ell+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - \alpha_1 \\ \vdots \\ x_k - \alpha_k \\ x_{k+1} + \alpha_{k+1} \\ \vdots \\ x_{k+\ell} + \alpha_{k+\ell} \\ x_{k+\ell+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} p \circ \rho_1 \circ \rho_2(\mathbf{x}) = {} & x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+\ell}^2 \\ & + 2\alpha_{k+\ell+1} x_{k+\ell+1} + \cdots + 2\alpha_n x_n + \xi. \end{aligned}$$

情形 1. 当 $2\alpha_{k+\ell+1} x_{k+\ell+1} + \cdots + 2\alpha_n x_n = 0$ 时, 令 $\lambda = 0$ 和 $\mu = -\xi$ 即可.

情形 2. 当 $2\alpha_{k+\ell+1}x_{k+\ell+1}+\cdots+2\alpha_n x_n\neq 0$ 时, 存在 $j\in\{k+\ell+1,k+\ell+2,\ldots,n\}$ 使得 $\alpha_j\neq 0$. 设 $m=n-(k+\ell)$. 考虑一个 m 阶可逆方阵 B, 其中 B 的第一行是 $(-2\alpha_{k+\ell+1},\ldots,-2\alpha_n)$, 其它行中的元素只有一个是 1 和其它都是 0. 特别地, 第 j 个元素一定是零. 这样的可逆矩阵显然存在. 于是

$$C=\begin{pmatrix} E_{k+\ell} & O \\ O & B \end{pmatrix}$$

是 n 阶可逆矩阵. 则 $C\mathbf{x}$ 中的第 $k+\ell+1$ 个坐标等于 $-2\alpha_{k+\ell+1}x_{k+\ell+1}-\cdots-2\alpha_n x_n$. 令 $\rho_3:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ 由公式 $\rho_3(\mathbf{x})=C^{-1}\mathbf{x}$ 给出. 则

$$p\circ\rho_1\circ\rho_2\circ\rho_3(\mathbf{x})=x_1^2+\cdots+x_k^2-x_{k+1}^2-\cdots-x_{k+\ell}^2-x_{k+\ell+1}+\xi. \tag{2}$$

令 $\lambda=1$ 和 $\mu=-\xi$ 即可. (上式的一个计算验证过程见注释 9.6). $\square$

注解 9.6 等式 (2) 的具体验证过程如下. 设 $\mathbf{y}=\rho_3(\mathbf{x})$, 其中 $\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n)^t$. 则

$$\begin{aligned} p\circ\rho_1\circ\rho_2(\mathbf{y}) &= y_1^2+\cdots+y_k^2-y_{k+1}^2-\cdots-y_{k+\ell}^2 \\ &\quad +2\alpha_{k+\ell+1}y_{k+\ell+1}+\cdots+2\alpha_n y_n+\xi. \end{aligned}$$

注意到由 ρ_3 的定义可得:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{k+\ell} \end{pmatrix} = E_{k+\ell} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{k+\ell} \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{pmatrix} y_{k+\ell+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} x_{k+\ell+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{aligned} p \circ \rho_1 \circ \rho_2(\mathbf{x}) &= x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+\ell}^2 \\ &\quad + (2\alpha_{k+\ell+1}, \ldots, 2\alpha_n) B^{-1} \begin{pmatrix} x_{k+\ell+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \xi \\ &= x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+\ell}^2 \\ &\quad - \vec{B}_1 B^{-1} \begin{pmatrix} x_{k+\ell+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \xi \\ &= x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+\ell}^2 \\ &\quad - (1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-k-\ell-1}) \begin{pmatrix} x_{k+\ell+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \xi \\ &= x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+\ell}^2 - x_{k+\ell+1} + \xi. \end{aligned}$$

验证完毕.

定理 9.7 [1] 设 $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ 的次数等于 2, 其齐 2 次部

[1] 见柯斯特利金第二卷191页的推论.

分记为 h_2. 把 p 看成从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数, h_2 看成相应的二次型. 设 $r = \operatorname{rank}(h_2)$ 和 k 是 h_2 的正惯性指数. 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上的仿射变换 ρ 使得

$$
\begin{array}{rcl}
p\circ\rho: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R} \\
& \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto \quad x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_r^2 - \mu,
\end{array}
$$

其中 $\mu \in \mathbb{R}$; 或存在 $\mathbb{R}^n$ 上的仿射变换 ρ 使得

$$
\begin{array}{rcl}
p\circ\rho: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R} \\
& \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto \quad x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_r^2 - x_{r+1}
\end{array}
$$

且 $r < n$.

证明. 注意到 h_2 的负惯性指数等于 $r-k$. 当引理 9.5 中 $\lambda = 0$ 时, 我们得到第一个函数. 否则 $\lambda = 1$. 我们考虑平移 $x_i \mapsto x_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{r+1\}$, $x_{r+1} \mapsto x_{r+1} - \mu$ 即可. $\square$

9.3 二次曲线和二次曲面分类

设 $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$. 定义

$$S_p = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^t \in \mathbb{R}^n \,|\, p(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0\}$$

称为由 p 定义的*超曲面*. 当 $\deg(p) = 2$ 时, S_p 称为*二次超曲面*, $\mathbb{R}^2$ 中的二次超曲面称为 *二次曲线*, $\mathbb{R}^3$ 中的二次超曲面称为*二次曲面*.

设 $\deg(p) = 2$, p 的齐二次部分等于 q, q 的秩等于 r, 签名是 (k, ℓ). 则 $r > 0$ 且 $k + \ell = r$.

首先考虑二次曲线 $(n = 2)$.

情形 C_1. $r = 2$.

(1a) $(k, \ell) = (2, 0)$. $p = x_1^2 + x_2^2 - \mu$. 如果 $\mu < 0$, 则 $S_p = \emptyset$; 如果 $\mu = 0$, 则 $S_p = \{\mathbf{0}_2\}$; 如果 $\mu > 0$, 则 S_p 是(椭)圆.

(1b) $(k, \ell) = (0, 2)$. 与 (1a) 类似.

(1c) $k = 1$, $\ell = 1$. $p = x_1^2 - x_2^2 - \mu$. 如果 $\mu \neq 0$, 则 S_p 是双曲线. 如果 $\mu = 0$, 则 S_p 是两条相交于一点的直线.

情形 C_2. $r = 1$.

(2a) $k = 1$, $\ell = 0$. 如果 $p = x_1^2 - x_2$, 则 S_p 是抛物线. 如果 $p = x_1^2 - \mu$, 则 $S_p = \emptyset$ $(\mu < 0)$; S_p 是两条重合的直线 $(\mu = 0)$; S_p 是两条平行直线 $(\mu > 0)$.

(2b) $k=0, \ell=1$. 与 (2a) 类似.

再考虑二次曲面 $(n=3)$.

情形 S_1**.** $r=3$.

(1a) $(k,\ell)=(3,0)$. $p=x_1^2+x_2^2+x_3^2-\mu$. 如果 $\mu<0$, 则 $S_p=\emptyset$; 如果 $\mu=0$, 则 $S_p=\{\mathbf{0}_3\}$; 如果 $\mu>0$, 则 S_p 是(椭)球面.

(1b) $(k,\ell)=(0,3)$. 与 (1a) 类似.

(1c) $(k,\ell)=(2,1)$. $p=x_1^2+x_2^2-x_3^2-\mu$. 如果 $\mu<0$, 则 S_p 是双叶双曲面. 如果 $\mu=0$, 则 S_p 是(椭)圆锥面. 如果 $\mu>0$, 则 S_p 是单叶双曲面.

情形 S_2**.** $r=2$.

(2a) $(k,\ell)=(2,0)$. 如果 $p=x_1^2+x_2^2-x_3$, 则 S_p 是椭圆抛物面; 如果 $p=x_1^2+x_2^2-\mu$, 则 $S_p=\emptyset$ $(\mu<0)$; $S_p=\{\mathbf{0}_3\}$ $(\mu=0)$; S_p (椭)圆柱面 $(\mu>0)$.

(2b) $(k,\ell)=(0,2)$. 与 (2a) 类似.

(2c) $(k,\ell)=(1,1)$. 如果 $p=x_1^2-x_2^2-x_3$, 则 S_p 是双曲抛物面. 如果 $p=x_1^2-x_2^2-\mu$, 则 S_p 是双曲柱面 $(\mu\neq 0)$; S_p 是两张相交于一条直线的平面 $(\mu=0)$.

情形 S_3**.** $r=1$.

(3a) $(k, \ell) = (1, 0)$. 如果 $p = x_1^2 - x_2$, 则 S_p 是抛物柱面; 如果 $p = x_1^2 - \mu$, 则 $S_p = \emptyset$ $(\mu < 0)$; S_p 是两张重合的平面 $(\mu = 0)$; S_p 是两张平行的平面 $(\mu > 0)$.

(3b) $(k, \ell) = (0, 1)$. 与 (3a) 类似.