中国科学院大学

试 题 专 用 纸

课程编号：B01GB001H-B01

课程名称：线性代数I-B (期中试卷)

任课教师：李子明、李宸、吴陆禹

注意事项：

1. 考试时间为120 分钟，考试方式闭卷；
2. 全部答案写在答题纸上；
3. 考试结束后，请将本试卷和答题纸、草稿纸一并交回。

1. (15分) 设置换 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 7 & 5 & 8 & 3 & 10 & 9 \end{pmatrix}$.

(i) 把 σ 写成互不相交的循环之积.

(ii) 计算 σ 的阶.

(iii) 确定 σ 的奇偶性.

解. *(i)* $\sigma = (142)(36578)(9\underline{10})$.

(ii) $\operatorname{ord}(\sigma) = \operatorname{lcm}(3,5,2) = 30$.

(iii) $(-1)^{2+4+1} = -1 \Rightarrow$ 奇置换.

2. (15分) 设 $S = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{Z}$ 且 $y \neq 0\}$. 对于 $(a,b),(c,d) \in S$, 如果 $ad = cb$, 则称 $(a,b),(c,d)$ 有关系 $\sim$, 记为 $(a,b) \sim (c,d)$.

(i) 证明: $\sim$ 是 S 上的等价关系.

(ii) 设 $(u,v),(x,y) \in \mathbb{Z}^2$, 如果 $uy = xv$, 则称 $(u,v),(x,y)$ 有关系 $\approx$, 记为

$$(u,v) \approx (x,y).$$

请回答 $\approx$ 是不是 $\mathbb{Z}^2$ 上的等价关系? 并说明理由.

解. *(i)* 对任意 $(x,y) \in S$, $xy = yx$. 故 $(x,y) \sim (x,y)$. 自反性成立

设 $(x,y),(a,b) \in S$ 且 $(x,y) \sim (a,b)$. 则 $xb = ay$. 故 $ay = xb$. 于是 $(a,b) \sim (x,y)$. 对称性成立.

设 $(x,y),(a,b),(u,v) \in S$, $(x,y) \sim (a,b)$ 且 $(a,b) \sim (u,v)$. 则 $xb = ay$ 且 $av = ub$. 如果 $a = 0$, 则 $x = u = 0$ ($\because b \neq 0$). 故 $xv = 0$ 和 $uy = 0$. 于是,

$(x,y) \sim (u,v)$. 否则 $a \neq 0$. 由假设可知 $xbav = ayub$. 因为 $ab \neq 0$, 所以 $xv = yu$. 我们同样有 $(x,y) \sim (u,v)$. 传递性成立.

(ii) $\approx$ 不是等价关系否则, $\approx$ 是 $\mathbb{Z}^2$ 上的等价关系. 直接验证可得 $(1,1) \approx (0,0)$ 和 $(1,2) \approx (0,0)$. 根据等价关系的传递性 $(1,1) \approx (1,2)$. 故 $2 = 1$, 矛盾.

3. (15分) 设齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$ 的系数矩阵为 A, 解空间为 V_A.

(i) 计算 $\mathrm{rank}(A)$.

(ii) 计算 V_A 的维数和一组基.

(iii) 设 a, b 是任意实数. 请回答以 $\begin{pmatrix} A & \begin{matrix} | \, a \\ | \, b \end{matrix} \end{pmatrix}$ 为增广矩阵的线性方程组是否都相容? 并说明理由.

解. *(i)* 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 由初等行变换得 $A \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 故 $\mathrm{rank}(A) = 2$.

(ii) 根据对偶定理, $\dim(V_A) = 5 - 2 = 3$. 直接计算得 V_A 的一组基是:

$$(0,1,1,-1,0)^t,\ (0,2,1,-1,1)^t,\ (-1,0,1,-1,0)^t.$$

(iii) 都相容. 理由如下: 设 $B = \begin{pmatrix} A & \begin{matrix} | \, a \\ | \, b \end{matrix} \end{pmatrix}$. 则 $\mathrm{rank}(B) \leq 2$.

因为 $\mathrm{rank}(A) = 2$, 所以 $\mathrm{rank}(B) \geq 2$. 故 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$. 从而, 对应的线性方程组相容.

4. (15分) 设 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ 是 $\mathbb{R}^4$ 的标准基, $\boldsymbol{\epsilon}_1$, $\boldsymbol{\epsilon}_2$, $\boldsymbol{\epsilon}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的标准基, 线性映射 $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ 由 $\phi(\mathbf{e}_1) = \boldsymbol{\epsilon}_1 - \boldsymbol{\epsilon}_3$, $\phi(\mathbf{e}_2) = \boldsymbol{\epsilon}_2 - \boldsymbol{\epsilon}_3$, $\phi(\mathbf{e}_3) = \boldsymbol{\epsilon}_1 + \boldsymbol{\epsilon}_2 - 2\boldsymbol{\epsilon}_3$, 和 $\phi(\mathbf{e}_4) = \boldsymbol{\epsilon}_1 - \boldsymbol{\epsilon}_2$ 确定.

(i) 写出 ϕ 在 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$; $\boldsymbol{\epsilon}_1$, $\boldsymbol{\epsilon}_2$, $\boldsymbol{\epsilon}_3$ 下的矩阵.

(ii) 计算 $\dim(\ker(\phi))$ 和 $\dim(\mathrm{im}(\phi))$.

(iii) 计算 $\phi(\mathbf{u})$, 其中 $\mathbf{u} = (1,1,1,0)^t$.

解. *(i)* 线性映射 ϕ 在给定基底下的矩阵是

$$A_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) 直接计算得 $\operatorname{rank}(A_\phi) = 2$. 故 $\dim(\operatorname{im}(\phi)) = 2$. 根据对偶定理,

$$\dim(\ker(\phi)) = 4 - 2 = 2.$$

(iii) $\phi(\mathbf{u}) = A_\phi \mathbf{u} = (2, 2, -4)^t$.

5. (10分) 计算所有的 $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ 使得

$$A \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A.$$

解. 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. 则

$$AJ = \begin{pmatrix} 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad JA = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

故 $a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0$, $a_{11} = a_{22} = a_{33}$ 和 $a_{12} = a_{23}$. 于是, $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$, 其中 x, y, z 是任意实数.

6. (10分) 设 a, b, m, n 都是正整数, 且 $am = bn$. 证明: am 是 m 和 n 的最小公倍数当且仅当 a 和 b 互素.

证明: *(i)* 设 am 是 m, n 的最小公倍数, $g = \gcd(a, b)$. 则存在 $x, y \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $a = xg$ 且 $b = yg$. 于是 $xgm = ygn$. 从而得到 $xm = yn$. 故 xm 是 m, n 的公倍数. 因为 $0 < xm \le am$ 且 am 是 m, n 的最小公倍数, 所以 $x = a$, 即 $g = 1$. 由此可知 a 和 b 互素.

(ii) 设 $\gcd(a, b) = 1$. 则存在 $u, v \in \mathbb{Z}$ 使得 $ua + vb = 1$. 再设 $l = \operatorname{lcm}(m, n)$. 则 $ual + vbl = l$. 因为 $m|l$, 所以 $(am)|(ual)$. 同理 $(bn)|(vbl)$. 再因为 $am = bn$, 所以 $am|(vbl)$. 故 $(am)|l$. 因为 am 是 m 和 n 的公倍数, 所以 $l|(am)$. 于是, $l = am$.

7. (10分) 从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}$ 的线性映射称为 $\mathbb{R}^n$ 上的线性函数. 设 f 和 g 是 $\mathbb{R}^n$ 上的线性函数. 证明:

(i) $\dim(\ker(f)) \geq n-1$ 且当 $n > 2$ 时, $\ker(f) \cap \ker(g) \neq \{\mathbf{0}\}$;

(ii) 如果 $\ker(f) = \ker(g)$, 则存在实数 α 使得对任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$f(\mathbf{x}) = \alpha g(\mathbf{x})$$

都成立.

证明: *(i)* 因为 $\dim(\mathbb{R}) = 1$ 和 $\mathrm{im}(f) \subset \mathbb{R}$, 所以 $\dim(\mathrm{im}(f)) \leq 1$. 根据对偶定理 $\dim(\ker(f)) \geq n-1$. 同理 $\dim(\ker(g)) \geq n-1$. 根据维数公式,

$$\begin{aligned}\dim(\ker(f) \cap \ker(g)) &= \dim(\ker(f)) + \dim(\ker(g)) - \dim(\ker(f) + \ker(g)) \\ &\geq n-1+n-1-n \\ &= n-2.\end{aligned}$$

因为 $n > 2$, 所以 $\dim(\ker(f) \cap \ker(g)) > 0$. 故 $\ker(f) \cap \ker(g) \neq \{\mathbf{0}\}$.

注: 也可利用线性函数在标准基下的矩阵把问题化为 $\ker(f) \cap \ker(g)$ 是由两个齐次线性方程构成的线性方程组的解空间. 因为 $n > 2$, 所以该方程组有至少三个未知数, 从而必有非平凡解.

(ii) 设 $V = \ker(f)$. 如果 $V = \mathbb{R}^n$. 则 f 和 g 都是零函数. 故 $f = g$. 可取 $\alpha = 1$. 否则, $\dim(V) = n-1$ (见 *(i)*). 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ 是 V 的一组基. 根据基扩充定理, $\mathbb{R}^n$ 有一组基 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_n$. 设 $\lambda = f(\mathbf{v}_n)$ 和 $\mu = g(\mathbf{v}_n)$. 因为 $\mathbf{v}_n \notin V$, 所以 $\lambda \neq 0$ 和 $\mu \neq 0$. 设 $\alpha = \mu^{-1}\lambda$ 和 $h = f - \alpha g$, 则 $h(\mathbf{v}_j) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. 根据线性映射基本定理, h 是零映射. 于是 $f = \alpha g$.

注: 也可利用线性函数在标准基下的矩阵把问题化为 $\ker(f) \cap \ker(g)$ 是由两个齐次线性方程构成的线性方程组的解空间. 因为该解空间维数是 $n-1$. 所以该方程组对应的矩阵 $A \in \mathbb{R}^{2\times n}$ 的秩是 1 (对偶定理). 由此可知, A 的两行线性相关. 故存在 $\lambda \in \mathbb{R}$ 使得 $f = \lambda g$.

8. (10分) 设 V_1, V_2 和 W 是 $\mathbb{R}^n$ 的三个子空间, $\mathbb{R}^n = V_1 + V_2$ 且 $\mathbb{R}^n = V_1 \cap V_2 + W$. 证明:

(i) $V_1 = V_1 \cap V_2 + V_1 \cap W$,

(ii) $\dim(V_1) + \dim(V_2 \cap W) = \dim(V_2) + \dim(V_1 \cap W)$.

证明*: (i)* 因为 $\mathbb{R}^n = (V_1 \cap V_2) + W$ 且 $V_1 \cap V_2 \subset V_1$, 所以子空间的模律蕴含

$$V_1 \cap \mathbb{R}^n = (V_1 \cap V_1 \cap V_2) + (V_1 \cap W).$$

于是, $V_1 = (V_1 \cap V_2) + (V_1 \cap W)$.

(ii) 根据 *(i)*,

$$\dim(V_1) + \dim(V_2 \cap W) = \dim\left((V_1 \cap V_2) + (V_1 \cap W)\right) + \dim(V_2 \cap W).$$

再利用维数公式得

$$\dim(V_1) + \dim(V_2 \cap W) = \dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 \cap W) - \dim(V_1 \cap V_2 \cap W) + \dim(V_2 \cap W).$$

注意到互换 V_1 和 V_2, *(i)* 说明 $V_2 = (V_1 \cap V_2) + (V_2 \cap W)$. 故上述推理蕴含

$$\dim(V_2) + \dim(V_1 \cap W) = \dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_2 \cap W) - \dim(V_1 \cap V_2 \cap W) + \dim(V_1 \cap W).$$

由此得到*:* $\dim(V_1) + \dim(V_2 \cap W) = \dim(V_2) + \dim(V_1 \cap W)$.