中国科学院大学

试 题 专 用 纸

课程编号：B01GB003H-B01

课程名称：线性代数II-B (期中试卷)

任课教师：李子明、李宸、吴陆禹

注意事项：

1. 考试时间为120 分钟，考试方式闭卷；
2. 全部答案写在答题纸上；
3. 考试结束后，请将本试卷和答题纸、草稿纸一并交回。

1. (15分) 设 $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ 是两个元素的域, $V = \mathbb{Z}_2^3$, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 是 V 的标准基. 设 $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ 和 $\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

(i) 求矩阵 A 使得 $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)A$, 并证明 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 是 V 的基.

(ii) 计算 $\mathbf{e}_3$ 在基底 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 下的坐标.

(iii) 设 $\mathbf{w} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$. 请回答 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}$ 是不是 V 的一组基, 并说明理由

解. *(i)* $A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}$. 通过初等行变换得 $A \to \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$. 故 $\operatorname{rank}(A) = 3$. 于是, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 是 V 的一组基.

(ii) 通过初等行变换得

$$(A|E) \to \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}.$$

故 $A^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}$. 从而, $\mathbf{e}_3$ 在 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 下的坐标是 $A^{-1}\mathbf{e}_3 = (\bar{1}, \bar{0}, \bar{1})^t$.

(iii) $\mathbf{w}$ 在 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 下的坐标是 $A^{-1}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) = (\bar{1}, \bar{1}, \bar{0})^t$. 于是, $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. 因为 $\mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 线性相关, 所以它们不是 V 的一组基.

2. (15分) 设 $V = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) < 3\}$ 和 $W = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) < 4\}$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间. 定义:

$$\begin{array}{rccc} \phi: & W & \to & V \\ & p & \mapsto & \dfrac{dp}{dx} \end{array} \quad \text{和} \quad \begin{array}{rccc} \rho: & V & \to & W \\ & p & \mapsto & \displaystyle\int_0^x p(t)dt. \end{array}$$

(i) 证明: ϕ 和 ρ 都是线性映射.

(ii) 证明: ϕ 是满射并计算 $\dim(\ker(\phi))$.

(iii) 证明: $\phi\circ\rho$ 是 V 上的恒同映射, 但 $\rho\circ\phi$ 不是 W 上的恒同映射.

解. *(i)* 由导数和积分的性质可知, 对任意 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $p,q\in W$, $f,g\in V$, 我们有

$$\phi(\alpha p+\beta q)=\alpha\phi(p)+\beta\phi(q)\in V \quad \text{和} \quad \rho(\alpha f+\beta g)=\alpha\rho(f)+\beta\rho(g)\in W.$$

故 $\phi : W\to V$ 和 $\rho : V\to W$ 都是线性映射.

(ii) 设 $p\in V$. 则在 W 中有 p 的原函数 f. 故 $p=\phi(f)$, ϕ 是满射. 特别地 $\dim(\mathrm{im}(\phi))=\dim(V)=3$. 根据对偶定理 $\dim(\ker(\phi))=\dim(W)-\dim(\mathrm{im}(\phi))=1$.

(iii) 根据变上限积分的求导法则可知, 对任意 $f\in V$. 我们有 $\phi\circ\rho(f)=f$. 故 $\phi\circ\rho$ 是 V 上恒同映射. 直接计算得 $\rho\circ\phi(1)=\int_0^x 0dt=1-1=0$. 故 $\rho\circ\phi$ 不是恒同映射.

3. (15分) 设 $A=\begin{pmatrix}\bar0&\bar1&\bar2\\ \bar1&\bar2&\bar1\\ \bar2&\bar1&\bar0\end{pmatrix}$, 其中 $\mathbb{Z}_3=\{\bar0,\bar1,\bar2\}$ 是三个元素的域. 计算可逆矩阵 P 和对角矩阵 D 使得 $P^tAP=D$.

解. 利用行列相伴消元, 我们有

$$\begin{aligned}(A|E)\to&\begin{pmatrix}\bar1&\bar2&\bar1&\bar0&\bar1&\bar0\\ \bar0&\bar1&\bar2&\bar1&\bar0&\bar0\\ \bar2&\bar1&\bar0&\bar0&\bar0&\bar1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\bar2&\bar1&\bar1&\bar0&\bar1&\bar0\\ \bar1&\bar0&\bar2&\bar1&\bar0&\bar0\\ \bar1&\bar2&\bar0&\bar0&\bar0&\bar1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\bar2&\bar1&\bar1&\bar0&\bar1&\bar0\\ \bar0&\bar1&\bar0&\bar1&\bar1&\bar0\\ \bar1&\bar2&\bar0&\bar0&\bar0&\bar1\end{pmatrix}\\ \to&\begin{pmatrix}\bar2&\bar0&\bar1&\bar0&\bar1&\bar0\\ \bar0&\bar1&\bar0&\bar1&\bar1&\bar0\\ \bar1&\bar0&\bar0&\bar0&\bar0&\bar1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\bar2&\bar0&\bar1&\bar0&\bar1&\bar0\\ \bar0&\bar1&\bar0&\bar1&\bar1&\bar0\\ \bar0&\bar0&\bar1&\bar0&\bar1&\bar1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\bar2&\bar0&\bar0&\bar0&\bar1&\bar0\\ \bar0&\bar1&\bar0&\bar1&\bar1&\bar0\\ \bar0&\bar0&\bar1&\bar0&\bar1&\bar1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\text{故 } P=\begin{pmatrix}\bar0&\bar1&\bar0\\ \bar1&\bar1&\bar0\\ \bar0&\bar1&\bar1\end{pmatrix}^t \text{ 和 } D=\mathrm{diag}(\bar2,\bar1,\bar1).$$

4. (15分) 设

$$p(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_3+x_2x_3+x_1x_4+x_2x_4$$

是 $\mathbb{R}^4$ 上的二次型. 计算 p 在 $\mathbb{R}^4$ 的基底

$$\mathbf{e}_1=(1,0,0,0)^t,\ \mathbf{e}_2=(0,1,0,0)^t,\ \mathbf{e}_3=(0,0,1,0)^t,\ \mathbf{e}_4=(0,0,0,1)^t$$

下的矩阵, $\operatorname{rank}(p)$ 和签名.

解. 二次型 p 在标准基下的矩阵是 $A=\begin{pmatrix}0&0&\frac12&\frac12\\0&0&\frac12&\frac12\\\frac12&\frac12&0&0\\\frac12&\frac12&0&0\end{pmatrix}$. 注意到第一和第三行线性无关, 第一和第二行线性相关, 第三和第四行线性相关. 故 $\operatorname{rank}(A)=2$. 从而 $\operatorname{rank}(p)=2$.

利用行列相伴消元得

$$A\to\begin{pmatrix}\frac12&\frac12&\frac12&\frac12\\0&0&\frac12&\frac12\\\frac12&\frac12&0&0\\\frac12&\frac12&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\frac12&\frac12&\frac12\\\frac12&0&\frac12&\frac12\\\frac12&\frac12&0&0\\\frac12&\frac12&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\frac12&\frac12&\frac12\\0&-\frac14&\frac14&\frac14\\\frac12&\frac12&0&0\\\frac12&\frac12&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&\frac12&\frac12\\0&-\frac14&\frac14&\frac14\\\frac12&\frac14&0&0\\\frac12&\frac14&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac12&\frac12\\0&-\frac14&\frac14&\frac14\\0&\frac14&-\frac14&-\frac14\\\frac12&\frac14&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&\frac12\\0&-\frac14&\frac14&\frac14\\0&\frac14&-\frac14&-\frac14\\\frac12&\frac14&-\frac14&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&\frac12\\0&-\frac14&\frac14&\frac14\\0&\frac14&-\frac14&-\frac14\\0&\frac14&-\frac14&-\frac14\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-\frac14&\frac14&\frac14\\0&\frac14&-\frac14&-\frac14\\0&\frac14&-\frac14&-\frac14\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-\frac14&\frac14&\frac14\\0&0&0&0\\0&\frac14&-\frac14&-\frac14\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-\frac14&0&\frac14\\0&0&0&0\\0&\frac14&0&-\frac14\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-\frac14&0&\frac14\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-\frac14&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

于是, q 的签名是 $(1,1)$.

5. (10分) 设 V 是域 F 上的 n 维线性空间, X 是 V 的子空间.

(i) 证明: 存在 V 的子空间 Y 使得 $V=X\oplus Y$.

(ii) 再设 W 是 V 的子空间满足 $V=X+W$. 证明: 存在 V 的子空间 Y 满足:

$$V=X\oplus Y\quad 和\quad Y\subset W.$$

证明. *(i)* 设 $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d$ 是 X 的一组基. 把该基扩充为 V 的一组基

$$\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d, \mathbf{x}_{d+1}, \ldots, \mathbf{x}_n.$$

令 $Y = \langle \mathbf{x}_{d+1}, \ldots, \mathbf{x}_n \rangle$. 设 $\mathbf{x} \in X$ 和 $\mathbf{y} \in Y$ 使得 $\mathbf{0} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$. 因为 $\mathbf{x} \in X$, 所以存在 $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in F$, 使得 $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^d \alpha_i \mathbf{x}_i$. 类似, 存在 $\alpha_{d+1}, \ldots, \alpha_n \in F$, 使得 $\mathbf{y} = \sum_{j=d+1}^n \alpha_j \mathbf{x}_j$. 于是, $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$. 因为 $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d, \mathbf{x}_{d+1}, \ldots, \mathbf{x}_n$ 是基底, 所以 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. 故 $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{0}$. 由此可知, $X + Y$ 是直和. 进而,

$$\dim(X+Y) = \dim(X) + \dim(Y) = d + n - d = n.$$

因为 $X + Y \subset V$ 且 $\dim(X+Y) = \dim(V)$, 所以 $V = X \oplus Y$.

(ii) 由 *(i)* 可知, 存在子空间 $Y \subset W$ 使得 $W = (X \cap W) \oplus Y$. 结合 $V = X + W$, 我们有 $V = X + X \cap W + Y$. 因为 $X + X \cap W = X$, 所以 $V = X + Y$. 注意到, $W \cap Y = Y$. 故 $X \cap Y = X \cap (W \cap Y) = (X \cap W) \cap Y = \{\mathbf{0}\}$, 其中最后一个等式来自 $(X \cap W) + Y$ 是直和. 因此 $X + Y$ 也是直和.

(ii) 的另解. 设 $X \cap W$ 的基是 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d$. 把它扩充为 X 的一组基

$$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k,$$

和 W 的一组基

$$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_l.$$

则由子空间维数公式的证明可知:

$$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_l$$

是 V 的一组基. 令 $Y = \langle \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_l \rangle$. 则 $Y \subset W$ 且 $V = X \oplus Y$.

6. (10分) 设 V 是 $\mathbb{R}$ 上 n 维线性空间, q 是 V 上的二次型且 $r = \mathrm{rank}(q)$.

(i) 证明: V 中存在 $n - r$ 维的子空间 W, 使得 $\forall\, \mathbf{w} \in W$, $q(\mathbf{w}) = 0$.

(ii) 进一步设 q 半正定. 证明: 不存在维数大于 $n - r$ 的子空间 $X \subset V$ 满足 $\forall\, \mathbf{x} \in X$, $q(\mathbf{x}) = 0$.

证明: 设 q 在 V 的基底 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的规范型是

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+l}^2,$$

其中 $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i$. 我们有 $r = k + l$.

(i) 设 $W=\langle \mathbf{e}_{r+1},\dots \mathbf{e}_n\rangle$. 则 $\forall\ \mathbf{w}\in W$, $q(\mathbf{w})=0$ 且 $\dim(W)=n-r$.

(ii) 因为 q 半正定, 所以 $l=0$, 即 $k=r$. 假设若存在维数大于 $n-r$ 的子空间 $X\subset V$ 满足 $\forall\ \mathbf{x}\in X$, $q(\mathbf{x})=0$. 令 $Y=\langle \mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_r\rangle$. 则

$$\dim(X\cap Y)=\dim(X)+\dim(Y)-\dim(X+Y)>n-r+r-n=0.$$

故存在非零向量 $\mathbf{v}\in X\cap Y$. 因为 $\mathbf{v}\in X$, 所以 $q(\mathbf{v})=0$. 因为 $\mathbf{v}\in Y$ 和 $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$, 所以 $q(\mathbf{v})>0$, 矛盾.

(ii) 的另解. 注意到 q 半正定蕴含 r 是 q 在基底 $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ 下可写为:

$$q(\mathbf{x})=x_1^2+\cdots+x_r^2.$$

如果 $q(\mathbf{x})=0$, 则 $\mathbf{x}$ 必然是 $\mathbf{e}_{r+1},\dots,\mathbf{e}_n$ 的线性组合, 即 $\mathbf{x}\in\langle \mathbf{e}_{r+1},\dots,\mathbf{e}_n\rangle$, 其维数是 $n-r$. 根据线性组合引理, 不存在维数大于 $n-r$ 的子空间 $X\subset V$ 满足 $\forall\ \mathbf{x}\in X$, $q(\mathbf{x})=0$.

7. (10分) 设 A 是 n 阶实对称矩阵且正定. 证明:

(i) 对任意 $m\in\mathbb{Z}$, A^m 正定;

(ii) 如果存在 $k\in\mathbb{Z}^+$ 使得 $A^k=E$, 则 $A=E$.

证明: 因为 A 正定, 所以存在 $P\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得 $A=P^tP$.

(i) 当 $m=0$ 时, $A^m=E$. 故结论显然成立. 当 $m=1$ 时, 结论也显然成立. 设 $m>1$. 则

$$A^m=\underbrace{(P^tP)(P^tP)\cdots(P^tP)}_{m}.$$

如果 $m=2k$. 令

$$Q=\underbrace{(P^tP)(P^tP)\cdots(P^tP)}_{k}.$$

则 Q 对称、可逆且 $A^m=Q^2$. 故 $A^m=Q^tQ$. 由此可知 A^m 正定.

如果 $m=2k+1$. 令

$$Q=\underbrace{(P^tP)(P^tP)\cdots(P^tP)}_{k}\cdot P^t.$$

则 Q 可逆且 $A^m=QQ^t$. 故 A^m 正定.

因为 A^{-1} 正定, 所以上述结论蕴含 A^{-m} 正定, 其中 m 是任意正整数.

(i) 的另解. 设 $m\geq 0$, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ 且 $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$.

如果 $m=2k$, 则 $\mathbf{y}=A^k\mathbf{x}\neq 0$. 这是因为 A^k 可逆. 又因为 A^k 对称, 所以

$$\mathbf{x}^tA^{2k}\mathbf{x}=\mathbf{x}^tA^kA^k\mathbf{x}=\left(A^k\mathbf{x}\right)^tA^k\mathbf{x}=\mathbf{y}^t\mathbf{y}>0.$$

故 A^{2k} 正定.

如果 $m=2k+1$, 则 $\mathbf{y}=A^k\mathbf{x}\neq 0$. 这是因为 A^k 可逆. 又因为 A^k 对称, 所以

$$\mathbf{x}^tA^{2k+1}\mathbf{x}=\mathbf{x}^tA^kAA^k\mathbf{x}=\left(A^k\mathbf{x}\right)^tA\left(A^k\mathbf{x}\right)=\mathbf{y}^tA\mathbf{y}>0.$$

故 A^{2k+1} 正定.

综上所述, 当 $m\geq 0$ 时 A^m 正定. 因为 A 正定蕴含 A^{-1} 也正定. 由此可知, 对任意整数 m, A^m 也正定.

(ii) 因为 $E-A^k=O$, 所以

$$(E-A)\underbrace{\left(E+A+\cdots+A^{k-1}\right)}_{B}=O.$$

因为正定矩阵之和仍正定, 所以 *(i)* 蕴含 B 正定. 故 B 可逆. 从而, $E-A=O$, 即 $A=E$.

8. *(10分)* 设 A 是 n 阶对称实矩阵, $n>1$. 它的 k 阶顺序主子式记为 Δ_k, $k=1,2,\ldots,n$.

(i) 当 $\Delta_1<0$, $\Delta_i>0$, $i=2,\ldots,n-1$, 和 $\Delta_n<0$ 时, 求 A 的签名, 并说明理由.

(ii) 证明: 如果 $\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_{n-1}$ 都大于零且 $\Delta_n=0$, 则 A 中位于第 n 行第 n 列处的元素非负.

证明: (i) 根据 Jacobi 定理,

$$A\sim_c \operatorname{diag}(\Delta_1,\Delta_2/\Delta_1,\Delta_3/\Delta_2,\ldots,\Delta_{n-1}/\Delta_{n-2},\Delta_n/\Delta_{n-1}).$$

由此可知, 当 $n>2$ 时, A 的签名是 $(n-3,3)$. 而当 $n=2$ 时, 签名是 $(1,1)$.

(ii) 设 $A=\begin{pmatrix} M & \mathbf{v} \\ \mathbf{v}^t & a_{n,n}\end{pmatrix}$. 因为 $\Delta_1>0,\ \ldots,\ \Delta_{n-1}>0$, 所以 M 正定. 根据分块矩阵的相伴消元公式 (第 6 次作业习题 1), 我们有:

$$A\sim_c B=\begin{pmatrix} M & \mathbf{0}_{n-1} \\ \mathbf{0}_{n-1}^t & a_{n,n}-\mathbf{v}^tM^{-1}\mathbf{v}.\end{pmatrix}$$

因为 $\det(A)=0$, 所以 $\det(B)=0$. 故 $\det(M)(a_{nn}-\mathbf{v}^tM^{-1}\mathbf{v})=0$. 因为

$$\det(M)=\Delta_{n-1}\neq 0,$$

所以 $a_{n,n}=\mathbf{v}^tM^{-1}\mathbf{v}$. 因为 M 正定, 所以 M^{-1} 正定. 于是, $\mathbf{v}^tM^{-1}\mathbf{v}\geq 0$. 由此可得, $a_{n,n}\geq 0$.