

大学解析几何入门讲义

解析几何是一门将代数方法与几何直观结合的数学课程,用代数工具解决几何问题。主要包括:

1. 向量代数与空间坐标系: 向量运算、点积、叉积及其几何意义。
2. 平面与空间直线: 直线方程、平面方程、直线与平面的位置关系。
3. 曲面与空间曲线: 常见曲面(如球面、圆锥面、柱面)及空间曲线的方程。
4. 二次曲线与二次曲面: 标准化、分类及几何性质分析。

数形结合: 解析几何与线性代数紧密相关,如行列式、矩阵、向量空间和二次型等概念在解析几何中有直接应用。

基础: 为微分几何、代数几何、拓扑学等提供计算和直观基础。

应用: 计算机图形学、机器人学、机器学习等领域的基础工具。

1. 空间直角坐标系

1.1 从两个坐标到三个坐标

在空间中取公共原点 O 和两两垂直的 x 轴、 y 轴、 z 轴,三个坐标轴采用相同的单位长度,并按右手法则确定正向,得到空间直角坐标系 $Oxyz$ 。点 P 的位置用有序数组 (x, y, z) 表示。

右手法则: 右手四指从 x 轴正向弯向 y 轴正向,大拇指指向 z 轴正向。

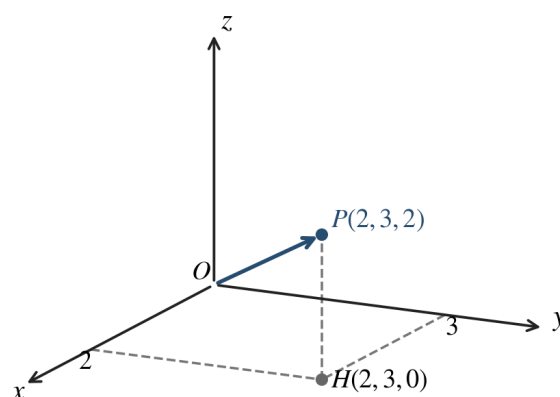


图 1: 点 P 的空间位置及其在 xy 平面上的正投影

1.2 坐标面与坐标轴

几何位置	坐标条件	示例
xy 平面	$z = 0$	$P(2, -1, 0)$
yz 平面	$x = 0$	$Q(0, 2, 3)$
xz 平面	$y = 0$	$R(1, 0, -2)$
z 轴	$x = 0, y = 0$	$S(0, 0, 4)$

2. 空间向量与线性运算

向量表示位移

向量是既有大小又有方向的量，用有向线段表示；其长度叫向量的模。空间解析几何中通常使用自由向量：有向线段平移后，只要大小和方向不变，就表示同一个向量。

点 A 描述一个位置；向量 $\overrightarrow{AB}$ 描述从 A 到 B 的位移。若 $A(x_1, y_1, z_1)$ 、 $B(x_2, y_2, z_2)$ ，则

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

零向量记为 $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ ，模为零，不规定方向。两个向量相等，当且仅当它们的三个对应坐标分别相等。

基向量与向量的模

沿三个坐标轴正向取单位向量 $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ 、 $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ 、 $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ 。任意空间向量可以唯一写成

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

对非零向量， $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ 是与它同向的单位向量。与它平行的单位向量有两个，分别为 $\mathbf{e}$ 和 $-\mathbf{e}$ 。

向量加减与数乘

设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 、 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ， λ 是实数。

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

$$\lambda \mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$

加法对应位移的首尾相接，即 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ 。数乘把长度变为原来的 $|\lambda|$ 倍；对非零向量， $\lambda > 0$ 时同向， $\lambda < 0$ 时反向， $\lambda = 0$ 时得到零向量。

向量加法满足交换律、结合律，数乘满足分配律。计算时可以像处理代数式一样整理，但要始终分清运算结果是向量还是数。

例：线性组合

已知 $\mathbf{a} = (1, -2, 3)$ 、 $\mathbf{b} = (2, 1, -1)$ ，求 $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 。

$$2\mathbf{a} - \mathbf{b} = (2, -4, 6) - (2, 1, -1) = (0, -5, 7)$$

共线条件

两个非零向量共线，也称平行，是指它们方向相同或相反。判定时找同一个实数倍数 λ ：

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$$

例： $\mathbf{a} = (1, 2, -1)$ 、 $\mathbf{b} = (-2, -4, 2)$ ，因为 $\mathbf{b} = -2\mathbf{a}$ ，所以二者共线且方向相反。

3. 数量积与向量夹角

数量积的定义

将两个非零向量的起点平移到同一点，它们的夹角 θ 取 $0 \leq \theta \leq \pi$ 。定义数量积，也称点积：

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$$

数量积的结果是一个实数。若有一个向量为零，规定数量积为零，但此时不定义两向量的夹角。数量积为正、为零、为负，分别对应非零向量夹角为锐角或零角、直角、钝角或平角。

由定义可得 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$ 。数量积满足交换律和分配律。

两个核心应用

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} \quad (\mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0})$$

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$$

上面的垂直判定用于两个非零向量。使用夹角公式前先检查两个模是否非零；算出的余弦值应落在区间 $[-1, 1]$ 内。

4. 用垂直关系建立平面方程

法向量决定平面的方向

与一个平面垂直的非零向量叫作该平面的**法向量**。法向量的任意非零实数倍仍是法向量，因此一个平面的法向量并不唯一。给定平面上一点和一个法向量，可以唯一确定这个平面。

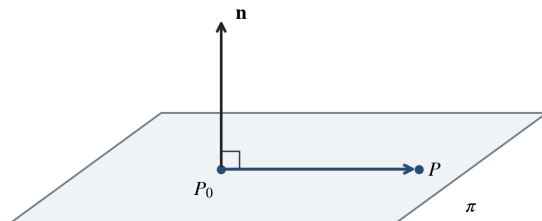


图 2：法向量与平面内从固定点出发的向量垂直

从几何条件推导点法式

已知平面经过 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ，法向量为 $\mathbf{n} = (A, B, C) \neq \mathbf{0}$ 。在平面上取任意点 $P(x, y, z)$ 。

第一步：写出位移向量

$$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

第二步：把几何条件写成数量积

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

第三步：按坐标展开

平面的点法式方程：

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

反过来，满足该式的点正好构成过 P_0 、垂直于 $\mathbf{n}$ 的平面。因此这个方程既能由几何条件推出，也能完整描述该平面。

一般式

展开点法式，可写为 $Ax + By + Cz + D = 0$ ，其中 A, B, C 不全为零， $\mathbf{n} = (A, B, C)$ 是一个法向量。

例：求经过 $P_0(1, -1, 2)$ 、法向量为 $\mathbf{n} = (2, 1, -1)$ 的平面方程。

$$2(x - 1) + (y + 1) - (z - 2) = 0$$

$$2x + y - z + 1 = 0$$

思考：方程 $x + 2y - z + 3 = 0$ 和 $2x + 4y - 2z + 6 = 0$ 是否表示同一平面？结合方程和法向量解释。

5. 向量叉积（外积）

定义与方向

在三维空间中，给定两个向量 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ ，向量叉积（也称外积）记为 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 。它的结果是向量，这一点与数量积的结果是实数不同。若 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 均非零，夹角为 $\theta \in [0, \pi]$ ，则 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 同时垂直于 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ ，其模为

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta$$

方向用右手定则确定：右手四指从 $\mathbf{a}$ 的方向弯向 $\mathbf{b}$ ，拇指所指就是 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 的方向。若两向量平行，或至少有一个为零向量，则叉积为零向量。交换两个向量的顺序会使方向反向。

坐标公式

设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ， $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ，则

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

计算时要特别注意顺序与符号。算完后可用 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$ 和 $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$ 做快速检验：叉积应同时垂直于原来的两个向量。

几何意义与常用性质

1. 垂直： $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 同时垂直于 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 。因此，平面内若有两个不共线方向，它们的叉积可作为这个平面的法向量。

2. 面积：以 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为邻边的平行四边形面积为 $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ ；由 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 张成的三角形面积为 $\frac{1}{2}\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ 。

3. 顺序：叉积不满足交换律，而满足反交换关系；同一向量与自身的叉积为零向量。

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \quad \mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

例：用叉积求平面法向量

已知 $A(1, 0, 1)$ 、 $B(2, 1, 1)$ 、 $C(1, 1, 2)$ ，求过 A 、 B 、 C 的平面方程。

先取平面内两个方向向量： $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 0)$ ， $\overrightarrow{AC} = (0, 1, 1)$ 。计算叉积得到

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1, -1, 1)$$

因此可取法向量 $\mathbf{n} = (1, -1, 1)$ 。用点 A 写点法式：

$$(x-1) - y + (z-1) = 0, \quad \text{即} \quad x - y + z - 2 = 0$$

检验： $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, 说明叉积所得向量确实同时垂直于平面内两个方向。

6. 标量三重积与体积

定义和几何意义

三个空间向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 的标量三重积定义为 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ 。它的结果是实数，其绝对值等于以三向量为三条邻边的平行六面体体积。

$$V_{\text{平行六面体}} = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$$

由同一顶点引出的三条棱构成四面体时，四面体体积为上述平行六面体的六分之一。

$$V_{\text{四面体}} = \frac{1}{6} |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$$

标量三重积为零，当且仅当三个向量共面（其中也包括线性相关、出现零向量等退化情形）。

四点共面判定

给定四点 A, B, C, D ，取同一出发点 A ，四点共面的判定式为

$$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) = 0$$

若结果不为零，则四点不共面；其绝对值除以 6 还给出四面体 $ABCD$ 的体积。

例：判断共面并求四面体体积

$A(0, 0, 0), B(1, 0, 0), C(0, 1, 0), D(1, 1, 2)$ 。有 $\mathbf{AB}=(1, 0, 0), \mathbf{AC}=(0, 1, 0), \mathbf{AD}=(1, 1, 2)$ 。

$$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) = 2 \neq 0$$

因此四点不共面，四面体体积为 $2/6=1/3$ 。

异面直线的距离

设 L_1 过点 P_1 、方向向量 $\mathbf{v}_1$ ， L_2 过点 P_2 、方向向量 $\mathbf{v}_2$ ，且 $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$ 。向量 $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ 同时垂直于两条直线方向，因此两直线之间的最短距离是 $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ 在该公共垂直方向上的投影长度：

$$d = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)|}{\|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\|}$$

若该值为 0，则两条非平行直线相交；若大于 0，则它们异面。

若两直线平行，则 $d = \frac{\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}$ 。

7. 空间直线的参数方程

一点和一个方向向量确定直线

设直线 L 经过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ，方向向量为 $\mathbf{v} = (a, b, c) \neq \mathbf{0}$ 。直线上任意点 $P(x, y, z)$ 满足 $\overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{v}$ ，其中 $t \in \mathbb{R}$ 。

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$$

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct \quad (t \in \mathbb{R})$$

是直线的参数方程。若 a, b, c 均非零，还可写成对称式 $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ ；

例：写直线方程并判断点是否在线上

过 $P_0(1, -1, 2)$ ，方向向量 $\mathbf{v} = (2, 1, -1)$ 的直线为

$$x = 1 + 2t, \quad y = -1 + t, \quad z = 2 - t$$

检验 $Q(5, 1, 0)$ ：由 $x = 5$ 得 $t = 2$ ，代入 y, z 也分别得到 1、0，因此 Q 在该直线上。判断一个点是否在线上，本质上是检查三个坐标能否对应同一个参数 t 。

两条直线的位置关系

设两直线方向向量分别为 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 。若 $\mathbf{v}_1 \parallel \mathbf{v}_2$ ，则两直线平行或重合；若方向不平行，把两个参数方程联立，若有公共解则相交，若无公共解则为异面直线。三维空间中“方向不平行”并不能保证两直线相交。

直线与平面的位置关系

设平面 π 的法向量为 $\mathbf{n} = (A, B, C)$ ，直线 L 的方向向量为 $\mathbf{v}$ 。关键量是 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ 。

条件	几何关系	进一步判断
$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$	直线方向与法向量垂直，因此 L 与 π 平行	若直线上一点满足平面方程，则 $L \subset \pi$ ；否则 L 与 π 平行且不相交
$\mathbf{v} \parallel \mathbf{n}$	$L \perp \pi$	方向向量与平面法向量平行
$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \neq 0$	L 与 π 有唯一交点	把直线参数式代入平面方程可求交点

直线与平面的夹角

直线与平面的夹角 α 取 $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ 。它与方向向量 $\mathbf{v}$ 和法向量 $\mathbf{n}$ 的夹角互余, 因此

$$\sin \alpha = \frac{|\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{n}\|}$$

特别地, $\alpha = 0$ 表示直线与平面平行; $\alpha = \pi/2$ 表示直线与平面垂直。

8. 数量积、叉积与综合应用

数量积与叉积对照

比较项目	数量积 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	叉积 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$
运算结果	实数	向量
夹角关系	$ \mathbf{a} \mathbf{b} \cos \theta$	$ \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \mathbf{b} \sin \theta$
非零向量结果为零	$\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$	$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 平行
典型几何用途	夹角、垂直、投影	法向量、面积、平行判定
交换顺序	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$	$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$
快速检验	结果必须是数	$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$

小作业

已知 $A(1, 0, 0)$ 、 $B(0, 1, 0)$ 、 $C(0, 0, 1)$ 。求三点所在平面、 $\triangle ABC$ 的面积, 并求原点 O 到该平面的距离。

第一步: 取平面内两个方向向量 $\mathbf{AB}=(-1, 1, 0)$ 、 $\mathbf{AC}=(-1, 0, 1)$ 。

第二步: 叉积求法向量。

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1, 1, 1)$$

因此可取 $\mathbf{n}=(1, 1, 1)$, 用点 A 写出平面方程 $x + y + z = 1$ 。

第三步: 由叉积的模求三角形面积。

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

第四步: 用点到平面距离公式。平面写为 $x + y + z - 1 = 0$, 因此

$$d(O, \pi) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$