

第二次作业

1. 设映射:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2$$

(1) 确定 $\text{im}(f)$.

(2) 设 $g = f|_{[0, 2]}$, 确定 $\text{im}(g)$ 并证明 g 是单射.

解: (1) $\because x^2 \geq 0$, 对于 $\forall y \geq 0$, 都存在 $x = \sqrt{y}$, 使得 $f(x) = y$,
故 $\text{im}(f) = [0, +\infty)$

(2) ① 设 $g = f|_{[0, 2]}$, 即 $g: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$
当 $x \in [0, 2]$ 时, $x^2 \in [0, 4]$, 故
 $\text{im}(g) = [0, 4]$.

② 设 $x_1, x_2 \in [0, 2]$, 且 $g(x_1) = g(x_2)$, 即 $x_1^2 = x_2^2$,

则
$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0$$

若 $x_1 - x_2 = 0$, 得 $x_1 = x_2$.

若 $x_1 + x_2 = 0$, $\because x_1, x_2 \geq 0$ 故 $x_1 = x_2 = 0$.

所以总有 $x_1 = x_2$. 因此 $g(x)$ 是单射. $\square$

单射: 一个映射 $f: X \rightarrow Y$ 是单射, 若 f 把 X 中不同的元素映射到不同元素, 即对 $a, b \in X$, 若 $a \neq b$, 则 $f(a) \neq f(b)$.

e.g., $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \mapsto a^3$ 是单射

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \mapsto a^2$ 不是单射

证明一个映射是单射: ① $\forall a \neq b, f(a) \neq f(b)$.
② 若 $\forall f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.
③ $\forall y \in Y, |f^{-1}(y)| \leq 1$

2. 设 $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ 由公式 $f(n) = n+1$ 给出, $g: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ 由

$$g(n) = \begin{cases} n-1 & n > 1 \\ 1 & n = 1 \end{cases}$$

给出.

(1) 证: f 是单射, g 是满射.

(2) 对 $\forall n \in \mathbb{Z}$, 计算 $f \circ g(n)$ 和 $g \circ f(n)$.

(1) 证: ① 设 $f(n_1) = f(n_2)$, 则 $n_1+1 = n_2+1, \Rightarrow n_1 = n_2$.

故 f 是单像

② 若 $m=1$, 取 $n=1$, 则 $g(1)=1$;

若 $m > 1$, 取 $n=m+1$, 则 $g(m+1)=m$

故 g 是满射

□

满射: $f: X \rightarrow Y$ 为满射. 若对 $\forall y \in Y, \exists x \in X$, s.t. $f(x) = y$.

e.g., (1). 设 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (a, b, c) \mapsto (a, b)$. 则

$$f^{-1}(0, 0) = \{(0, 0, c) \mid c \in \mathbb{R}\}$$

(2). $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n+1$ 不是满射

$$f^{-1}(0) = \emptyset.$$

证明一个映射是满射: ① $\forall y \in Y, \exists x \in X, \text{ s.t. } y = f(x)$
 ② $\forall y \in Y, f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$.

投影 $p_S: S \times T \rightarrow S \quad (x, y) \mapsto x$

是满射.

$$(2) \quad f \circ g(n) = f(g(n)) = \begin{cases} n & n > 1 \\ 2 & n = 1 \end{cases}$$

$$g \circ f(n) = g(f(n)) = g(n+1) = n. \quad (n+1 \geq 1)$$

3. 设 $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, 若二维向量 $\vec{u}, \vec{v} \in S$ 在以原点为圆心的某个圆上, 则称 $\vec{u}, \vec{v}$ 有关 R , 记为 $\vec{u} R \vec{v}$, 验证 R 是等价关系.

证: ① 自反性: $\forall \vec{u} \in S$, $\vec{u}$ 自身在以原点为圆心的某个圆上. (半径 $|\vec{u}|$)

② 对称性: 若 $\vec{u} R \vec{v}$, 即 $\vec{u}, \vec{v} \in S$ 在以原点为圆心的某个圆上, 则 $\vec{v}, \vec{u} \in S$ 也在以原点为圆心的某个圆上, 即 $\vec{v} R \vec{u}$.

③ 传递性: 若 $\vec{u} R \vec{v}$, $\vec{v} R \vec{w}$, 则 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ 在以原点为圆心的相同圆上, 则

$$\vec{u} R \vec{w}. \quad \square$$

3⁺: 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 考虑线性方程组

$$\begin{cases} \cos \theta x - \sin \theta y = a, \\ \sin \theta x + \cos \theta y = b \end{cases}$$

(1) 证明该方程组是确定的.

(2) 设 $\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$, 若 α, β 不全为零, 则记 $e(\alpha, \beta)$ 是点 $(\alpha, \beta)^T$ 与原点 $(0, 0)^T$ 的连线, 计算 $e(u, v)$ 和 $e(a, b)$ 的夹角, 其中 $(u, v)^T$ 是上述方程组的解且 $(a, b)^T \neq (0, 0)^T$.

(3) 设 $(u, v)^T$ 和 $(a, b)^T$ 是上述方程组的解, 证 $(u, v)^T R (a, b)^T$.

(1) 证明: 方程组系数矩阵行列式

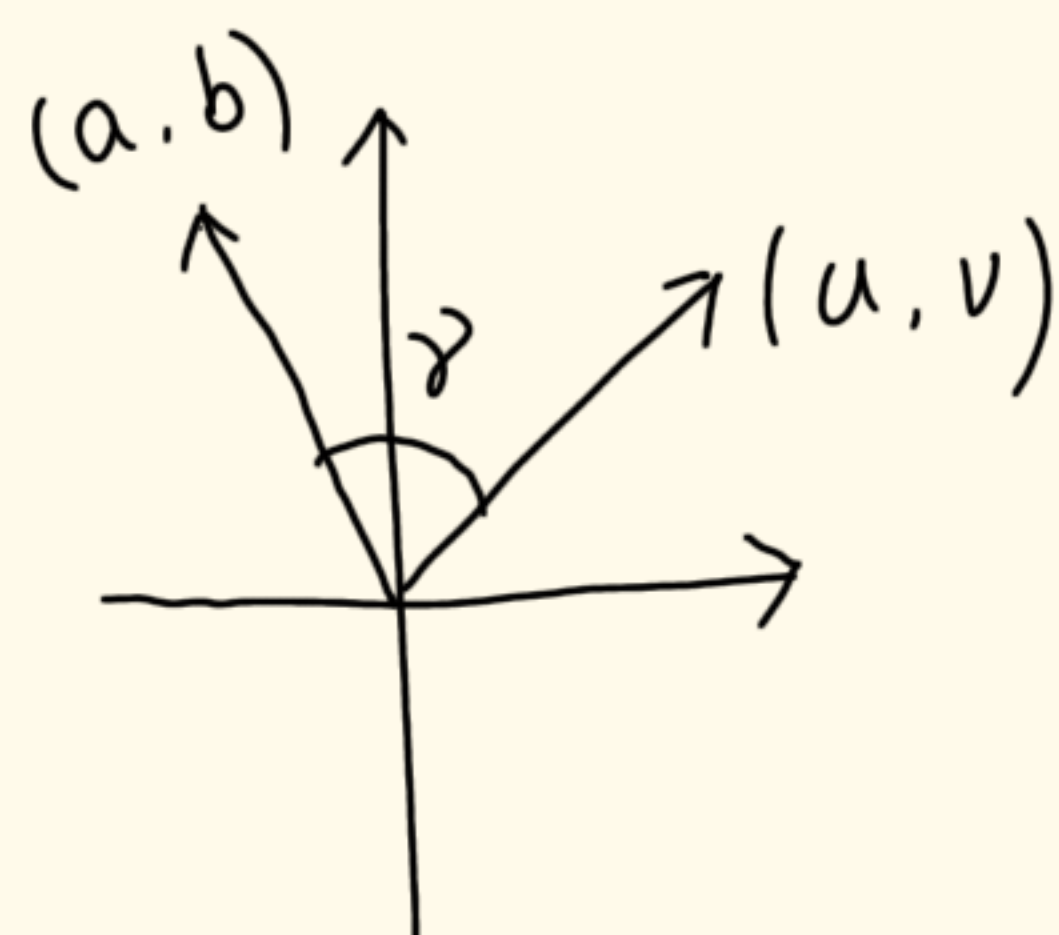
$$\begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \neq 0$$

故方程组解确定.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & -\sin \theta \\ b & \cos \theta \end{vmatrix}}{1} = a \cos \theta + b \sin \theta$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \cos \theta & a \\ \sin \theta & b \end{vmatrix}}{1} = b \cos \theta - a \sin \theta$$

$$(2) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \theta + b \sin \theta \\ b \cos \theta - a \sin \theta \end{pmatrix}$$



设 $l(u, v)$ 与 $l(a, b)$ 夹角为 γ , 则

$$\cos \gamma = \frac{au + bv}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{a^2 \cos \theta + b^2 \cos \theta}{a^2 + b^2} = \cos \theta$$

$\therefore l(u, v)$ 与 $l(a, b)$ 夹角为 $\min \{ \theta, \pi - \theta \} \pmod{\pi}$

几何上看: γ 是矩阵:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{pmatrix} \text{ 是二维平面上的旋转矩阵, 将}$$

二维平面上的向量绕原点旋转角度 θ .

$$(3) \text{ 由 } \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \theta + b \sin \theta \\ b \cos \theta - a \sin \theta \end{pmatrix} \text{ 知}$$

$$u^2 + v^2 = a^2 + b^2.$$

故 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 同在以原点为中心, 半径为 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 的

圆上. 故 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

等价类 $\rightarrow$ 等价类 $\rightarrow$ 商集、商映射

4. 设映射 $f: X \rightarrow Y$ 且 A, B 是 X 的子集, 证明:

$$(1) \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$$(2) \quad f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$$

$$(3) \quad \text{若 } f \text{ 是单射, 则 } f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

$$\text{证明: (1) } y \in f(A \cup B) \iff \exists x \in A \cup B, \text{ s.t. } y = f(x).$$

$$\iff \exists x \in A, \text{ s.t. } y = f(x) \text{ 或 } \exists x \in B, \text{ s.t. } y = f(x).$$

$$\iff y \in f(A) \text{ 或 } y \in f(B)$$

$$\iff y \in f(A) \cup f(B)$$

$$\therefore f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$$(1) \quad \text{先证 } f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$$

$$\forall y \in f(A \cup B), \exists x \in A \cup B, \text{ s.t. } y = f(x)$$

$$\text{若 } x \in A, \text{ 则 } y \in f(A); \text{ 若 } x \in B, \text{ 则 } y \in f(B)$$

$$\text{故 } y \in f(A) \cup f(B) \text{ 故 } f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$$

$$\text{再证 } f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$$

$$\forall y \in f(A) \cup f(B), \text{ 有 } y \in f(A) \text{ 或 } y \in f(B).$$

$$\text{若 } y \in f(A), \text{ 则 } \exists x \in A \subseteq A \cup B, \text{ s.t. } y = f(x).$$

$$y \in f(A) \subseteq f(A \cup B)$$

$$\text{若 } y \in f(B), \text{ 则 } \exists x \in B \subseteq A \cup B, \text{ s.t. } y = f(x)$$

$$y \in f(B) \subseteq f(A \cup B)$$

$$\text{故 } f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$$

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

□

$$(2) \quad \forall y \in f(A \cap B), \exists x \in A \cap B, \text{ s.t.}$$

$y = f(x)$. $\therefore x \in A$, 有 $f(x) \in f(A)$.

$x \in B$, 有 $f(x) \in f(B)$ 故

$$y = f(x) \in f(A) \cap f(B)$$

$$\Rightarrow f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B) \quad \square$$

(3) 由 (2) 知 $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

现证 $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$.

$\forall y \in f(A) \cap f(B)$, $\exists x_1 \in A$, s.t.

$y = f(x_1)$; $\exists x_2 \in B$, s.t.

$$y = f(x_2).$$

由于 $f(x_1) = y = f(x_2)$, 且 f 单

故 $x_1 = x_2 = t$, 故 $t \in A \cap B$

$$y = f(t) \in f(A \cap B)$$

$$\therefore f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$$

综上: $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$. $\square$

4⁺: 设映射 $f: X \rightarrow Y$. $S, T \subseteq Y$. 证

$$(1) \quad f^{-1}(S \cup T) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$$

$$(2) \quad f^{-1}(S \cap T) = f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T)$$

证: (1) $\forall x \in f^{-1}(S \cup T) \Leftrightarrow f(x) \in S \cup T$

$$\Leftrightarrow f(x) \in S \text{ 或 } f(x) \in T$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(S) \text{ 或 } x \in f^{-1}(T)$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$$

$$(2) \quad \forall x \in f^{-1}(S \cap T) \Leftrightarrow f(x) \in S \cap T$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in S \text{ 且 } f(x) \in T$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(S) \text{ 且 } x \in f^{-1}(T)$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T)$$

映射分解定理: 任意映射 $f: X \rightarrow Y$ 都可唯一地 (同构意义下) 分解为:

$$f = i \circ \bar{f} \circ p$$

其中: $p: X \rightarrow X/\sim$ 是商映射, 将每个元素映到其等价类, 等价关系 $\sim$ 定义为 $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

$\bar{f}: X/\sim \rightarrow \text{im}(f)$ 是双射, 定义为 $\bar{f}([x]) = f(x)$.

$i: \text{im}(f) \rightarrow Y$ 是嵌入映射, 即 $i(y) = y$ 对所有 $y \in \text{im}(f)$

并且有 p 是满射, $\bar{f}$ 是双射, i 是单射.

任意映射都可唯一地分解为一个满射、一个双射和一个单射的复合

先通过商映射“合并”具有相同像的元素, 再通过双射“一一对应”到像集, 最后“嵌入”回目标集

e.g. 线性映射的标准分解

设 $T: V \rightarrow W$ 是域 F 上的线性映射. 令

$$\ker T = \{v \in V \mid T(v) = 0\}$$

为核 (零空间), $\text{im } T = T(V)$ 为像空间. 则 T 可唯一地分解为三个线性映射的复合:

$$T = i \circ \bar{T} \circ \pi$$

• $\pi: V \rightarrow V/\ker T$ 是商映射 (满射). 将每个向量 v 送到其所在的等价类 $v + \ker T$

• $\bar{T}: V/\ker T \rightarrow \operatorname{im} T$ 是双射. 定义为 $\bar{T}(v + \ker T) = T(v)$

• $i: \operatorname{im} T \hookrightarrow W$ 是嵌入映射 (单射)

$$\text{故 } \dim V = \dim(\ker T) + \dim(\operatorname{im} T)$$

映射的良定性

定义: 设 $f: X \rightarrow Y$ 是一个映射, f 是良定的, 如果它满足

1. 存在性: 对于每个 $x \in X$, 都 $\exists y \in Y$, s.t. $y = f(x)$.
2. 唯一性: 对于每个 $x \in X$, 若 $y_1 = f(x)$ 且 $y_2 = f(x)$ 则 $y_1 = y_2$.

命题1: 设 $\sim$ 是 X 上的等价关系, $X/\sim$ 是商集. 若定义

$f: X/\sim \rightarrow Y$ 为 $f([x]) = g(x)$, 其中 $g: X \rightarrow Y$ 是某个映射, 则 f 是良定的当且仅当对任意 $x_1, x_2 \in X$, 若 $x_1 \sim x_2$, 则 $g(x_1) = g(x_2)$.

满射 - 单射分解定理: 任意映射 $f: X \rightarrow Y$ 都可分解为 $f = i \circ s$, 其中

• $s: X \rightarrow \operatorname{im}(f)$ 是满射, 定义为 $s(x) = f(x)$

• $i: \operatorname{im}(f) \rightarrow Y$ 是单射, 定义为 $i(y) = y$.

集合论

• 德国数学家康托创立

• 集合之间的映射比集合元素的个数计算更基本
• 比较两个有限集合元素的多少:

① 先数出每个集合元素个数再比较大小

② 若从集合 A 到 B 存在单射 $f: A \rightarrow B$

$$\Rightarrow |A| \leq |B|$$

将自然数集合 $\mathbb{N}$ 作参照物

可数集: 若存在双射 $f: A \rightarrow \mathbb{N}$, 则集合 A 可数
 若存在单射 $f: A \rightarrow \mathbb{N}$, 则集合 A 至多可数

例 1: $\mathbb{Z}$ 是可数的

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} \quad f(x) = \begin{cases} 2x & x \in \mathbb{N} \\ -2x-1 & x \in \mathbb{Z}^- \end{cases}$$

例 2: $\mathbb{Q}$ 是可数的

法 1: 只需证明 $\mathbb{Q}^+$ 可数, 再扩展到全体有理数.

$\mathbb{Q}^+$ 都可写成 $\frac{p}{q}$, 其中 $p, q \in \mathbb{Z}^+$, $\gcd(p, q) = 1$ (既约分数)

对角线枚举法 (如右图所示)

沿着对角线 ($p+q = \text{常数}$) 依次遍历:

- $p+q=2: \frac{1}{1}$
- $p+q=3: \frac{2}{1}, \frac{1}{2}$
- $p+q=4: \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}$
- $p+q=5: \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}$
- ...

跳过不是既约分数的重复项 (e.g. $\frac{2}{2}, \frac{3}{3}$), 得到序列:

$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{1}{5}, \dots$

故所有正有理数被排成一行, 故 $\mathbb{Q}^+$ 可数.

再构造全体有理数:

$$\mathbb{Q} = \{0\} \cup \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-$$

可数集的并仍然可数, 故序列可写为:

$0, \frac{1}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{1}, -\frac{2}{1}, \dots$

$\Rightarrow \mathbb{Q}$ 可数.

法 2: 对既约正有理数 $r = \frac{p}{q}$, $\gcd(p, q) = 1$, 定义映射

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = 2^p 3^q$$

该映射是单射. 把 $\mathbb{Q}^+$ 嵌入 $\mathbb{N}$, 无限集合若能单射入可数集, 则自身可数.

