

第三次作业.

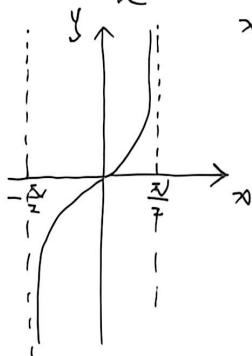
1. 设 $x \in (0, 1)$, 证明 $f(x) = \tan(\pi(x - \frac{1}{2}))$ 为 $(0, 1)$ 区间到实轴的一个双射.

pf: $f'(x) = \frac{\pi}{\cos^2(\pi(x - \frac{1}{2}))} > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内严格递增.

即对 $\forall x_1, x_2 \in (0, 1)$, $x_1 < x_2$, 有 $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f$ 是单射.

又 $\because \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$, 故 f 是满射.

□



2. 设 $f(x) = \sin x$, 定义域为 $\mathbb{R}$.

(1) $\forall y \in [-1, 1]$, 求 $f^{-1}(y)$.

(2). 求由 f 诱导的等价关系 $\sim_f$ 的商集 ($x \sim_f x' \iff f(x) = f(x')$)

(3). 刻画上述等价关系诱导的商映射 π .

解: (1). $f^{-1}(\{y\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \sin x = y\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \arcsin y + 2k\pi \text{ or } x = \pi - \arcsin y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ $f^{-1}(\{y\})$ 是集合的原像.

(2). 等价关系: $x \sim_f x' \iff f(x) = f(x')$, 即 $\sin x = \sin x'$.

等价类为: $\bar{x} = \{x' \mid \sin x = \sin x'\}$

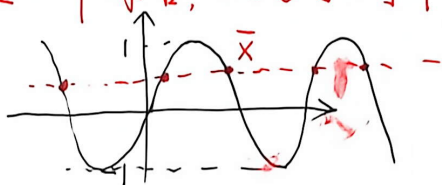
$$= \{x' \mid x' = x + 2k\pi \text{ or } x' = \pi - x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\mathbb{R}/\sim_f = \{\bar{x} \mid x \in \mathbb{R}\}$$

由于两个实数属于同一个等价类, 且 $\sin$ 它们有相同正弦值, 故也可用 $y \in [-1, 1]$ 来标记等价类:

$$\mathbb{R}/\sim_f = \{f^{-1}(\{y\}) \mid y \in [-1, 1]\}$$

商集的每个元素都是一个集合, 且与 $[-1, 1]$ 中的一个数一一对应.



①



(3) · 定义自然映射:

$$\pi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\sim_f$$

$$x \longmapsto [x]_f$$

即每个实数 $x \in \mathbb{R}$ 映射到其所含等价类.

定义商映射 (f 诱导的映射):

$$\bar{f}: \mathbb{R}/\sim_f \longrightarrow [-1, 1]$$

$$[x]_f \longmapsto \sin x$$

· π 是满射. (每个等价类都有代表元)

· $\bar{f}$ 是良定义的. ($\because x \sim_f x', \text{ 有 } \sin x = \sin x'$)

· $\bar{f}$ 是双射. (不同的等价类恰好对应不同正弦值)

交换图:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & [-1, 1] \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ \mathbb{R}/\sim_f & & \end{array} \quad f = \bar{f} \circ \pi.$$

验证: $\forall x \in \mathbb{R}, (\bar{f} \circ \pi)(x) = \bar{f}([x]_f) = \sin x = f(x).$

目的: 所有正弦值相同的实数归为一个等价类. 每个等价类对应到唯一正弦值

偏序关系:

集合 X 上的二元关系 " $\leq$ " 满足:

① $x \leq x$ (自反性);

② 若 $x \leq y$ 且 $y \leq x$, 则 $x = y$ (反对称性);

③ 若 $x \leq y$ 且 $y \leq z$, 则 $x \leq z$ (传递性).

带有偏序或全序的集合称偏序集.

全序: $\forall x, y \in X$, 要么 $x \leq y$, 要么 $y \leq x$. (任何两个元素都有可比性)
 $\leq$ 是 X 上的偏序, 且

②



最大元: $x \in A, X$, 满足 $\forall y \in X \Rightarrow y \leq x$ (都可比)

极大元: $x \in X$, 满足若 $\exists y \in X, s.t. x \leq y \Rightarrow x = y$ (部分可比)

注: 最大元与 X 中所有元素都可比

极大元与 X 中部分元素可以不可比.

命题: 非空有限偏序集必存在极大元.

证: 反证法

设 $(X, \leq)$ 中无极大元, 其中 $|A| < +\infty$.

则 $\forall x \in X, \exists y \in X, s.t. x < y$ (严格)

可构造一条无限长的链:

$$x_1 \in X \Rightarrow \exists x_2 \in X, s.t. x_1 < x_2.$$

$$x_2 \in X \Rightarrow \exists x_3 \in X, s.t. x_2 < x_3.$$

$\vdots$

$$\Rightarrow x_1 < x_2 < x_3 < \dots$$

由自反性与反对称性, $x_1, x_2, x_3, \dots$ 互不相同.

这与 $|A| < \infty$ 矛盾. 则命题成立 $\square$.

同理可证: 非空有限偏序集必存在极小元.

故: 非空有限偏序集必存在极大元和极小元 (但不一定唯一)

E.g. $X = \{1, 2, \dots, n\}$. P 为 X 的非空 真子集 全体形成的集合.

则 P 有 n 个极大元和 n 个极小元. 但无最大元也无最小元.

n 个极大元: $\{2, 3, \dots, n\}, \{1, 3, \dots, n\}, \{1, 2, 4, \dots, n\}, \dots, \{1, 2, \dots, n-1\}$

n 个极小元: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \dots, \{n\}$.

无最大元.

无最小元.

3. 设 $|$ 是 $\mathbb{Z}^+$ 上的整除关系, 即对 $a, b \in \mathbb{Z}^+$, 若存在 $m \in \mathbb{Z}^+$, 使得 $b = ma$, 则

$a|b$. 验证 " $|$ " 是偏序, 并举例说明 " $|$ " 不是全序.

(1). 自反性: $\forall a \in \mathbb{Z}^+, a = 1 \cdot a \Rightarrow a|a$.

(2) 反对称性: $\forall a, b \in \mathbb{Z}^+$, 若 $a|b$ 即 $b = ma$. 若 $b|a$ 即 $a = nb$, 则

$$b = ma = mnb \Rightarrow mn = 1, \text{ 又 } m, n \in \mathbb{Z}^+, \text{ 故 } m = n = 1.$$

$$\text{故 } a = b.$$

(3)



(3) 传递性: $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}^+, a|b, b|c, \text{ 则 } b=ma, c=nb \Rightarrow c=nma \Rightarrow a|c.$

故“ $|$ ”是偏序.

例: $2|3, 3|2; 4|5, 5|4$ 没法比较

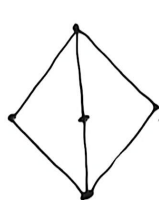
· 图形可表达偏序集.

· 偏序集 X 中的元素 y 覆盖 x , 若 $x < y$ 且不存在 $z \in X, \text{ s.t. } x < z < y.$

· 覆盖可用于偏序集的图形表达

· 用点表示 X 的元素, 若 y 覆盖 x , 则置 y 点于 x 点的上方, 并用直线段连接 x 和 y . $x < y$ 当且仅当有从 y 下降 x 的折线, 可能不止一条. x 和 y 不相比且没有下降折线连接, 则 x 和 y 不可比较.

e.g.



偏序



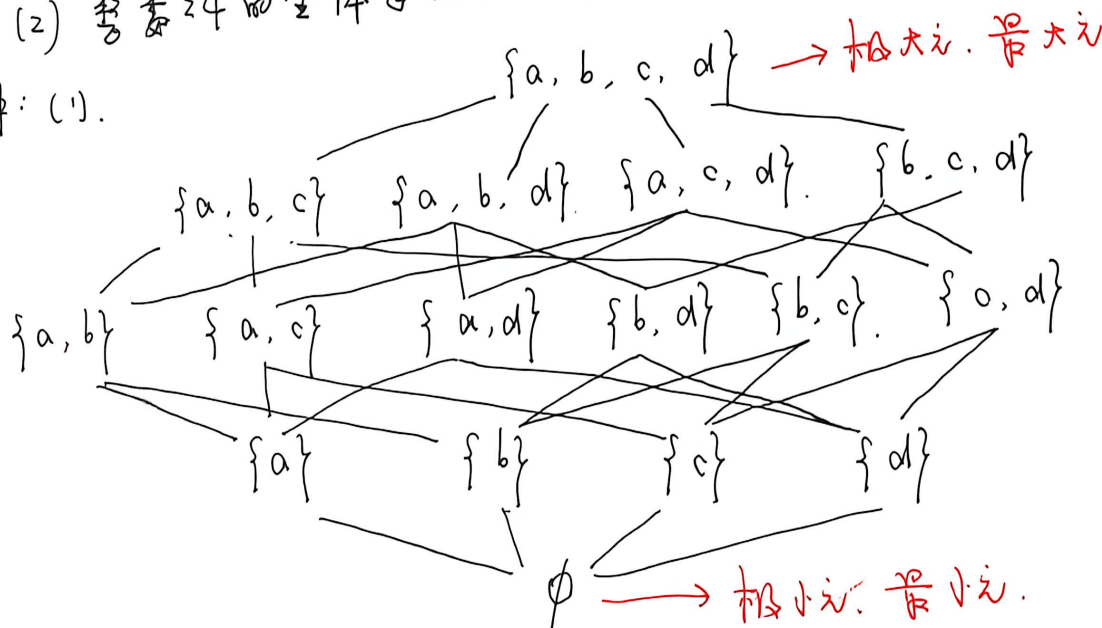
全序

4. 画出下述偏序集图, 并给出偏序集的极小元, 极大元, 最小元和最大元.

(1). 四元集合 $\{a, b, c, d\}$ 的所有子集组成的集合 (偏序关系由集合包含关系给出).

(2) 素数 ≤ 4 的全体正因子的集合 (偏序关系由整除给出).

解: (1).



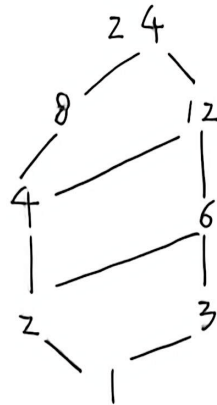
(1)⁺: 非空真子集组成集合的极小元: $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$

不存在最大元, 最小元. 极大元: $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$

④



(2)



最大元: 24

极大元: 24

最小元: 1

极小元: 1.

(2)⁺: 去掉 1 之后, 最大元: 24, 极大元: 24, 极小元 2, 3, 无最小元.

注: 若偏序集存在最大元, 则它是唯一极大元,
(1.) (1.)

5. (1) 求置换

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 8 & 9 & 1 & 2 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

互不相交的循环分解. 阶数和逆置换 π^{-1} .

(2) 计算置换的乘积.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 3 & 2 & 1 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

解: (1). $\pi = (1385)(26)(497)$.

$$\text{ord}(\pi) = \text{lcm}(4, 2, 3) = 12$$

• 设 $\sigma \in S_n \setminus \{e\}$ 是互不相交的循环 $\tau_1, \dots, \tau_m$ 的积.

$$\text{ord}(\sigma) = \text{lcm}(\text{ord}(\tau_1), \dots, \text{ord}(\tau_m))$$

$$(\tau_1 \tau_2 \dots \tau_k)^{-1} = (\tau_k \tau_{k-1} \dots \tau_2 \tau_1).$$

$$\pi^{-1} = (5831)(62)(794)$$

$$= (1583)(626)(479).$$

$$(2). (165)(2874)(3) \times (1245)(3)(678).$$

(5)



扫描全能王 创建

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 3 & 1 & 6 & 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= (1 \ 8 \ 5 \ 6 \ 4) (2 \ 3) (7)$$

置换与行列式.

n 阶方阵 $A = (a_{ij})$, 其行列式为:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}$$

• S_n : 所有 n 元置换的集合

• $\operatorname{sgn}(\sigma)$: 置换符号, 偶置换为 1, 奇置换为 -1.

• $\prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}$: 每行, 每列各取一个元素相乘.

置换的作用: 保证每个乘积都从不同行, 不同列各选一个元素.

Ex. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

S_3 有 $3! = 6$ 个置换, 故行列式有 6 项:

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} \\ &\quad - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} \end{aligned}$$

分别对应 6 个置换.

置换 ($\sigma(1)$ $\sigma(2)$ $\sigma(3)$)	逆序数	符号
(1 2 3)	0	+1
(1 3 2)	1	-1
(2 1 3)	1	-1
(2 3 1)	2	+1
(3 1 2)	2	+1
(3 2 1)	3	-1

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{\text{逆序数}}$$

(6)

