1. 判断以下置换奇偶性:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 8 & 7 & 1 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$

解: (1) $\sigma = (1\ 2\ 5)(3\ 8)(4\ 7) = (5\ 2)(5\ 1)(3\ 8)(4\ 7)$ 4个对换 偶置换

or $\varepsilon_\sigma = (-1)^{\sum_{i=1}^{3}(ord(c_i)-1)} = (-1)^{2+1+1} = 1$ 偶置换.

判断置换奇偶性 { 对换个数 / 置换符号

(2) $\sigma = (1\ n)(2\ n-1)(3\ n-2)\cdots(\frac{n}{2}\ \frac{n}{2}+1) \longrightarrow \frac{n}{2}$ 个对换.

① n 为偶数时,

a. $n = 4k$, $k \in \mathbb{Z}^+$时, $2k$个对偶换, 为偶置换

b. $n = 4k+2$, $k \in \mathbb{Z}^+$时, $(2k+1)$个对换, 为奇置换

② n 为奇数时, $\sigma = (1\ n)(2\ n-1)(3\ n-2)\cdots(\frac{n-1}{2}\ \frac{n+3}{2}) \rightarrow \frac{n-1}{2}$个对换

a. $n = 4k+1$时, $k \in \mathbb{Z}^+$, $2k$个对换, 偶置换

b. $n = 4k+3$时, $k \in \mathbb{Z}^+$, $(2k+1)$个对换, 奇置换.

2. 设 $\sigma \in S_n$ 为置换.

(1) 若 $ord(\sigma)$ 为奇数, 证明 σ 为偶置换

(2) 当 $ord(\sigma)$ 为偶数时, σ 是否一定为奇置换? 给出证明或举出反例.

(1) 证: 将 σ 分解为互不相交的循环的乘积, $\sigma = c_1 c_2 \cdots c_k$.
设 c_i 的长度为 l_i, $ord(\sigma) = lcm(l_1, l_2, \cdots l_k)$, $ord(\sigma)$奇 $\Rightarrow$ 每个因子 l_i 必为奇数. 一个长度 l_i 的循环可分解为 (l_i-1) 个对换, (l_i-1) 是偶数, $\sum_{i=1}^{k}(l_i-1)$ 也是偶数, 故 σ 可分解为偶数个对换之积.
σ 为偶置换. ∎

(2) 不一定. 反例. S_4 中的置换: $\sigma = (12)(34)$ $ord(\sigma) = 2$, σ 是偶置换.

3. 计算线性组合 $3\vec{v}_1+4\vec{v}_2-5\vec{v}_3$，其中

$$\vec{v}_1=\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix},\quad \vec{v}_2=\begin{pmatrix}4\\1\\5\end{pmatrix},\quad \vec{v}_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}.$$

解：$3\vec{v}_1+4\vec{v}_2-5\vec{v}_3=\begin{pmatrix}9\\3\\12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}16\\4\\20\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10\\-5\\15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\12\\17\end{pmatrix}$

4. 判断下述向量组是否线性无关.

(1). $\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\quad \vec{v}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix},\quad \vec{v}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}.$

(2). $\vec{v}_1=\begin{pmatrix}4\\-5\\2\\6\end{pmatrix},\quad \vec{v}_2=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\\3\end{pmatrix},\quad \vec{v}_3=\begin{pmatrix}6\\-3\\3\\9\end{pmatrix},\quad \vec{v}_4=\begin{pmatrix}4\\-1\\5\\6\end{pmatrix}$

解：(1). 设 $A=(\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3)$. 由Gauss消去法可知：

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&3&1\\3&1&5\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&1\\0&-5&5\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

于是，以A为系数矩阵的齐次线性方程组有非平凡解，故$\vec{v}_1$，$\vec{v}_2$，$\vec{v}_3$线性相关.

或直接观察可得 $2\vec{v}_1-\vec{v}_2=\vec{v}_3$，即 $2\vec{v}_1-\vec{v}_2-\vec{v}_3=0$. 线性相关

或计算行列式 (对于低维向量，可直接观察).

$$\begin{vmatrix}1&2&0\\2&3&1\\3&1&5\end{vmatrix}=0\Rightarrow\text{有非平凡解}\Rightarrow\text{线性相关}.$$

(2). 设 $A=(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{v}_4)$. 由Gauss消去法可知：

$$A=\begin{pmatrix}4&2&6&4\\-5&-2&-3&-1\\2&1&3&5\\6&3&9&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&3&5\\-5&-2&-3&-1\\4&2&6&4\\6&3&9&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&3&5\\0&\frac{1}{2}&\frac{9}{2}&\frac{23}{2}\\0&0&0&-6\\0&0&0&-9\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}2&1&3&5\\0&1&9&23\\0&0&0&6\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ 有非平凡解，故 $\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3},\vec{v_4}$ 线性相关.

4+: 给定一个线性无关的向量组 $\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2},\vec{\alpha_3},\vec{\alpha_4}$，判断向量组

$\vec{b_1}=3\vec{\alpha_1}+2\vec{\alpha_2}+\vec{\alpha_3}+\vec{\alpha_4}$，$\vec{b_2}=2\vec{\alpha_1}+5\vec{\alpha_2}+3\vec{\alpha_3}+2\vec{\alpha_4}$，$\vec{b_3}=3\vec{\alpha_1}+4\vec{\alpha_2}+2\vec{\alpha_3}+3\vec{\alpha_4}$

是否线性相关.

解：设 $\beta_1\vec{b_1}+\beta_2\vec{b_2}+\beta_3\vec{b_3}=0$，$\beta_1,\beta_2,\beta_3\in\mathbb{R}$，即：

$$\beta_1(3\vec{\alpha_1}+2\vec{\alpha_2}+\vec{\alpha_3}+\vec{\alpha_4})+\beta_2(2\vec{\alpha_1}+5\vec{\alpha_2}+3\vec{\alpha_3}+2\vec{\alpha_4})+\beta_3(3\vec{\alpha_1}+4\vec{\alpha_2}+2\vec{\alpha_3}+3$$

$\because \vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2},\vec{\alpha_3},\vec{\alpha_4}$ 线性无关

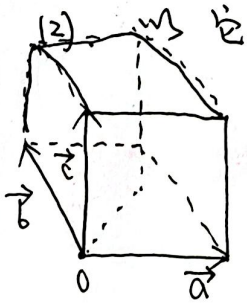
$$\therefore\begin{cases}3\beta_1+2\beta_2+3\beta_3=0,\\2\beta_1+5\beta_2+4\beta_3=0,\\\beta_1+3\beta_2+2\beta_3=0,\\\beta_1+2\beta_2+3\beta_3=0.\end{cases}$$ 系数矩阵 $\begin{pmatrix}3&2&3\\2&5&4\\1&3&2\\1&2&3\end{pmatrix}$ 高斯消去 $\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

只有非平凡解，故线性无关. → 四维空间的3个向量，张成一个3维子空间（秩＝这些向量张成的空间维数）

4++: $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$，$\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$，

(1). $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 是否线性无关.

(2). 它们为邻边构成的平行六面体体积.



(1). $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&1\\0&0&4\end{pmatrix}$ $|A|=24\neq0$ 线性无关

$V=0\Rightarrow$ 线性相关（张不成平行六面体）

4+++: 设 $\vec{\beta}, \vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_k \in \mathbb{R}^n$ 且 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_k$ 线性无关，再设

$$\vec{\beta} = a_1\vec{\alpha}_1 + a_2\vec{\alpha}_2 + \cdots + a_k\vec{\alpha}_k,$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_k \in \mathbb{R}$ 且 $a_1 \neq 0$，证明：$\vec{\beta}, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_k$ 线性无关.

证：设 $b_1\vec{\beta} + b_2\vec{\alpha}_2 + \cdots + b_k\vec{\alpha}_k = 0$，$b_1, b_2, \cdots, b_k \in \mathbb{R}$.

$\because \vec{\beta} = a_1\vec{\alpha}_1 + a_2\vec{\alpha}_2 + \cdots + a_k\vec{\alpha}_k$

$\therefore b_1(a_1\vec{\alpha}_1 + a_2\vec{\alpha}_2 + \cdots + a_k\vec{\alpha}_k) + b_2\vec{\alpha}_2 + \cdots + b_k\vec{\alpha}_k = 0.$

$\therefore b_1a_1\vec{\alpha}_1 + (b_1a_2 + b_2)\vec{\alpha}_2 + \cdots + (b_1a_k + b_k)\vec{\alpha}_k = 0$

$\therefore \vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_k$ 线性无关 $\therefore$

$\therefore b_1a_1 = 0,\ b_1a_2 + b_2 = 0, \cdots, b_1a_k + b_k = 0.$ 又 $a_1 \neq 0$

$\therefore b_1 = 0, \quad b_2 = 0, \cdots, \quad b_k = 0.$

故 $\vec{\beta}, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_k$ 线性无关

□.

5. 设 $\vec{u}, \vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_k, \vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_e \in \mathbb{R}^n$. 再设 $\vec{u}$ 既是 $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_k$ 的线性组合又是 $\vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_e$ 的线性组合，证明：若 $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_k, \vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_e$ 线性无关则 $\vec{u} = \vec{0}$.

证：$\vec{u} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_k\vec{v}$，$\vec{u} = \beta_1\vec{w}_1 + \beta_2\vec{w}_2 + \cdots \beta_k\vec{w}_k$

相减得：$\vec{0} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_k\vec{v} - \beta_1\vec{w}_1 - \cdots - \beta_k\vec{w}_k$

若 $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_k, \vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_k$ 线性无关则

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0, \quad \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0.$$

故 $\vec{u} = \vec{0}$.

□.

6. 设 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^n$. 判断

(1). $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ 是否都是 $\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ 的线性组合.

(2). $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ 是否都是 $\vec{v}_1 - \vec{v}_2, \vec{v}_2 - \vec{v}_3$ 和 $\vec{v}_3 - \vec{v}_1$ 的线性组合.

(1). $\vec{v}_1 = \frac{1}{2}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \frac{1}{2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$. $\vec{v}_2 = \frac{1}{2}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) - \frac{1}{2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$.

(2). 设 $\vec{v}_1 = \alpha(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) + \beta(\vec{v}_2 - \vec{v}_3) + \gamma(\vec{v}_3 - \vec{v}_1)$

$$= (\alpha - \gamma)\vec{v}_1 + (\beta - \alpha)\vec{v}_2 + (\gamma - \beta)\vec{v}_3$$

① 若 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ 线性无关，则 $\begin{cases} \alpha - \gamma = 1, \\ \beta - \alpha = 0, \\ \gamma - \beta = 0. \end{cases}$ 无解. 故 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ 程他们的线性组合.

② 若 $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ 线性相关,

(i). $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ 共线, 则 $\vec{v_1}-\vec{v_2}, \vec{v_2}-\vec{v_3}, \vec{v_3}-\vec{v_1}$ 不同时为零即可, 即除 $\vec{v_1}=\vec{v_2}=\vec{v_3}=\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ 外, 都可以线性表示.

(ii) $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ 共面不共线, 设 $a_1\vec{v_1}+a_2\vec{v_2}+a_3\vec{v_3}=\vec{0}$

又 $(\alpha-\gamma-1)\vec{v_1}+(\beta-\alpha)\vec{v_2}+(\gamma-\beta)\vec{v_3}=\vec{0}$

故: $\begin{cases}\alpha-\gamma-1=a_1k\\ \beta-\alpha=a_2k\\ \gamma-\beta=a_3k\end{cases}\Rightarrow(a_1+a_2+a_3)k=-1$

故 $a_1+a_2+a_3\neq0$ 即可.

综上: 若 $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ 线性无关, 则不能.

若 $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ 线性相关, 则 $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ 均可由三个差向量线性表出 $\Leftrightarrow \exists a,b,c,\ a\vec{v_1}+b\vec{v_2}+c\vec{v_3}=\vec{0}$ 且 $a+b+c\neq0$.

严格证明:

($\Leftarrow$) 假设存在 $a\vec{v_1}+b\vec{v_2}+c\vec{v_3}=\vec{0}$ 且 $a+b+c\neq0$,

设 $s=a+b+c$, 有

$$s\vec{v_1}=(a+b+c)\vec{v_1}=a\vec{v_1}+b\vec{v_2}+c\vec{v_3}+b(\vec{v_1}-\vec{v_2})+c(\vec{v_1}-\vec{v_3})$$

故: $s\vec{v_1}=b(\vec{v_1}-\vec{v_2})+c(\vec{v_1}-\vec{v_3})$ (*)

又 $\vec{v_1}-\vec{v_3}=(\vec{v_1}-\vec{v_2})+(\vec{v_2}-\vec{v_3})$, 代入(*)有

$$s\vec{v_1}=(b+c)(\vec{v_1}-\vec{v_2})+c(\vec{v_2}-\vec{v_3}).$$

故: $\vec{v_1}=\frac{b+c}{s}(\vec{v_1}-\vec{v_2})+\frac{c}{s}(\vec{v_2}-\vec{v_3})$

$$\vec{v_2}=\vec{v_1}-(\vec{v_1}-\vec{v_2})=\left(\frac{b+c}{s}-1\right)(\vec{v_1}-\vec{v_2})+\frac{c}{s}(\vec{v_2}-\vec{v_3})$$

~~$\vec{v_3}=\vec{v_1}+(\vec{v_3}-\vec{v_1})$~~

$$\vec{v_3}=\vec{v_1}+(\vec{v_3}-\vec{v_1})=\frac{b+c}{s}(\vec{v_1}-\vec{v_2})+\frac{c}{s}(\vec{v_2}-\vec{v_3})+(\vec{v_3}-\vec{v_1}).$$

故: $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ 都能由三个差向量线性表示.

($\Rightarrow$): 假设 $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ 均可由三个差向量线性表示, 以 $\vec{v_1}$ 为代表.

$\because \vec{v_3} - \vec{v_1} = -(\vec{v_1} - \vec{v_2}) - (\vec{v_2} - \vec{v_3})$.

$\therefore \exists\ p, q \in \mathbb{R}$, s.t.

$$\vec{v_1} = p(\vec{v_1} - \vec{v_2}) + q(\vec{v_2} - \vec{v_3})$$

故: $(1-p)\vec{v_1} + (p-q)\vec{v_2} + q\vec{v_3} = \vec{0}$

设: $a = 1-p, \quad b = p-q, \quad c = q$.

则 $a\vec{v_1} + b\vec{v_2} + c\vec{v_3} = \vec{0}$

且 $a+b+c = 1 \neq 0$.

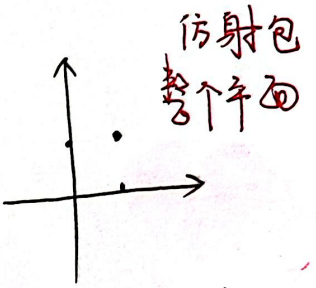
故存在一组 k 表 a, b, c, s.t. $a\vec{v_1} + b\vec{v_2} + c\vec{v_3} = \vec{0}$ 且 $a+b+c \neq 0$

所以必要性得证.

□

E.g. (1). 线性相关, 可由差向量表示

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



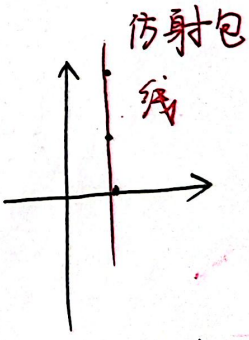
显然 $\vec{v_1} + \vec{v_2} - \vec{v_3} = \vec{0}$

k 表之和 $1+1-1 = 1 \neq 0$. 故 $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ 可由差向量表示

$\vec{v_1} - \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} - \vec{v_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 可张成二维平面,

(2) 线性相关, 但不能由差向量表示

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

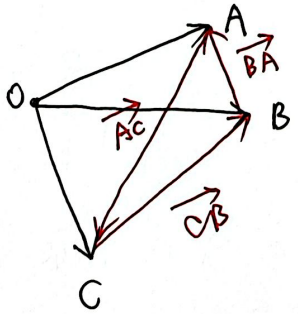


$$\vec{v_1} + (-2)\vec{v_2} + \vec{v_3} = \vec{0}$$

k 表之和: $1-2+1 = 0$. 故 $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ 不可由差向量表示.

$$\vec{v_1} - \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} - \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_3} - \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

几何意义:



三个差向量能够表示三个位置向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 当且仅当原点 O 位于 A, B, C 的仿射包中. 即

若 A, B, C 不共线, 则它们所在平面须经过原点.

$\cdots$ 共线, 直线 $\cdots$

共点, 都是原点

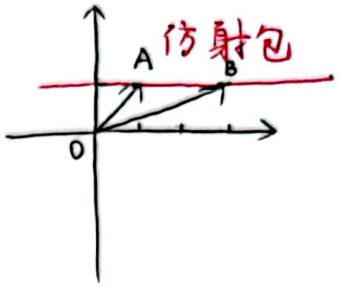
如 Eg. (2) 3点 $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ 都位于 $y=1$ 直线上, 不包括原点

仿射包(直观理解) [Affine Hull]: 包含给定所有点的最小直线、平面或更高维平直空间

数学定义 $\text{aff}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \{a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3 \mid a+b+c=1\}$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ 的仿射包:

E.g. $A=(1,1)$, $B=(3,1)$.



任意一个仿射组合:

$$P = aA + bB, \quad a+b=1,$$

令 $b=t$, $a=1-t$, 则

$$P = (1-t)(1,1) + t(3,1)$$

$$= (1+2t, 1)$$

当 t 取遍所有实数时, 得到整条直线 $y=1$.

$\text{span}\{A, B\} = \mathbb{R}^2$

- 线性张成空间: 必经过原点.
- 仿射包: 不一定经过原点
- 线性无关: 任意向量线性无关. (独立的向量方向) ↓加原点.
- 仿射无关: 点 (独立的点位置差异) ↓只是这几个点

E.g. 三点 A, B, C 仿射无关 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ A, B, C 三点不共线.