第五次作业

1. 设 $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4} \in \mathbb{R}^4$, 其中

$$\vec{u_1}=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\0\end{pmatrix},\quad \vec{u_2}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \vec{u_3}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\\-1\end{pmatrix},\quad \vec{u_4}=\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

计算 $<\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4}>$ 的两组不同的基和维数.

解: 将向量作为列构成系数矩阵 A.

$$A=\begin{pmatrix}-1&2&1&3\\1&0&1&-1\\2&1&3&-1\\0&-1&-1&-1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{去法}]{\text{高斯消}} \begin{pmatrix}-1&2&1&3\\0&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

秩为2, 故维数为2.

$\vec{u_1}, \vec{u_2}$ 线性无关 $\longrightarrow$ 基.

$\vec{u_1}, \vec{u_3}$ 线性无关 $\longrightarrow$ 基

$\vec{u_1}, \vec{u_4}$ 线性无关 $\longrightarrow$ 基

非零两向量只要不成比例即线性无关

基可以不同, 但维数固定.

补: 基底之间核心关系: 过渡矩阵.

$B_1=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 和 $B_2=\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ 是同一个空间 W 的两组基底.

$$\beta_j=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\alpha_i,\quad j=1, \cdots, n.$$

矩阵 $A=(a_{ij})$ 称为从 B_1 到 B_2 的过渡矩阵, 满足

$$(\beta_1, \cdots, \beta_n)=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)A$$

描述两套标尺之间的换算规则, 而这保证换算不丢失信息(不降维、不退化)

坐标变换关系:

同一向量 $v \in W$ 在两组基底下的坐标 x (相对 B_1) 与 y (相对 B_2) 满足:

$$v=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)x=(\beta_1, \cdots, \beta_n)y=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)Ay.$$

由坐标唯一性得: $x=Ay$, 即 $y=A^{-1}x$.

E.g. 1. $W=\mathbb{R}^2$.

基底 B_1: $\alpha_1=(1,0)$, $\alpha_2=(0,1)$. 基底 B_2: $\beta_1=(1,1)$, $\beta_2=(1,-1)$.

$\beta_1=1\cdot\alpha_1+1\cdot\alpha_2=(1,1)$, $\beta_2=1\cdot\alpha_1-1\cdot\alpha_2=(1,-1)$.

故:

$$(\beta_1, \beta_2)=(\alpha_1, \alpha_2)\underbrace{\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}}_{A\text{ 过渡矩阵}}$$

坐标变换：

$v=(3,1)$ 在 B_1 下坐标为 $x=(3,1)^T$. 在 B_2 下：$y_1(1,1)+y_2(1,-1)=(3,1)$

即 $\begin{cases} y_1+y_2=3, \\ y_1-y_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1=2 \\ y_2=1 \end{cases}$ 故 $y=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

用公式验证：$x=Ay$

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=x.$$

2. 设 $\vec{v_1},\vec{v_2}$，$\vec{w_1},\vec{w_2}\in\mathbb{R}^3$，其中：

$$\vec{v_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \vec{v_2}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \vec{w_1}=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix},\quad \vec{w_2}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}.$$

再设 $V=\langle\vec{v_1},\vec{v_2}\rangle$，$W=\langle\vec{w_1},\vec{w_2}\rangle$. 计算 $\dim(V+W)$ 和 $\dim(V\cap W)$.

解：将向量 $\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{w_1},\vec{w_2}$ 作为列构成矩阵 B

$$B=\begin{pmatrix}1&-1&3&1\\0&1&1&1\\1&0&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{高斯消去法}}\begin{pmatrix}1&-1&3&1\\0&1&1&1\\0&0&-2&0\end{pmatrix}\rightarrow \text{秩为}3$$

4个3维向量必然线性相关.

故 $\dim(V+W)=3$.

又 $\vec{v_1},\vec{v_2}$ 线性无关，故 $\dim V=2$.

$\vec{w_1},\vec{w_2}$ 线性无关，故 $\dim W=2$.

故：$\dim(V+W)=3$，$\dim(V\cap W)=\dim V+\dim W-\dim(V+W)$

$=1$

3. 设 U,V,W 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，证明：如果 $V\subset U$，则

$$U\cap(V+W)=U\cap V+U\cap W=V+U\cap W.$$

证：由于 $V\subset U$，则 $U\cap V=V$ 故只需证 $U\cap(V+W)=V+U\cap W$.

(1) 先证 $U\cap(V+W)\subset V+U\cap W$. 只需证明互相包含

$\forall x\in U\cap(V+W)$，即 $x\in U$ 且 $x\in V+W$. 故存在 $v\in V$，$w\in W$，

s.t. $x=v+w$. 又 $V\subset U$，故 $w=x-v\in U$. 故 $w\in W\cap U$. ②

(2) 再证 $V+U\cap W \subseteq U\cap(V+W)$

$\forall x\in V+U\cap W$, 存在 $v\in V$, $y\in U\cap W$, s.t. $x=v+y$, 因为 $y\in U$ 且 $y\in W$, 故 $x=v+y\in V+W$. 又 $V\subset U$, 故 $x=v+y\in U$, 故 $x\in U\cap(V+W)$. 因此 $V+U\cap W\subset U\cap(V+W)$.

综上: $U\cap(V+W)=U\cap V+U\cap W=V+U\cap W$. □

3+: 设 U, V, W 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, 且 $V\subseteq U\subseteq V+W$. 证明:

$$U=V+(U\cap W)$$

进一步, 若 $V\cap W=\{0\}$, 证: $U=V\oplus(U\cap W)$.

证: (1) ①先证 $U\subseteq V+(U\cap W)$

$\forall u\in U\subseteq V+W$, 存在 $v\in V$, $w\in W$, s.t. $u=v+w$, 则 $w=u-v\in U$, 故 $w\in U\cap W$. 因此 $u=v+w\in V+(U\cap W)$.

故 $U\subseteq V+(U\cap W)$.

②再证 $V+(U\cap W)\subseteq U$.

$\forall x\in V+(U\cap W)$, 存在 $v\in V$, $y\in U\cap W$, s.t. $x=v+y$.

又 $y\in U$, $v\in V\subseteq U$, 故 $x=v+y\in U$. 因此 $V+(U\cap W)\subseteq U$.

综上: $U=V+(U\cap W)$.

③(1). $V\cap(U\cap W)\subseteq V\cap W=\{0\}$, 由问(1)知,

$$U=V\oplus(U\cap W)$$ □.

集合分配律:

$$(U\cup V)\cap W=(U\cap W)\cup(V\cap W).$$

但两个子空间并集不一定是子空间, 一般只有(不一定相等)

$$(U\cap W)+(V\cap W)\subseteq(U+V)\cap W.$$

Eg. $\mathbb{R}^2$ 中, $U=\mathrm{span}\{(1,0)\}$, $V=\mathrm{span}\{(0,1)\}$, $W=\mathrm{span}\{(1,1)\}$.

$U\cap W=V\cap W=\{0\}$, 但 $U+V=\mathbb{R}^2$, $\{0\}\neq W$.

加上包含关系(题3), 有等式

4. 设 U, V 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 证明: 若 $\dim(U)+\dim(V)>n$, 则 $U\cap V\neq\{0\}$.

证: 由维数公式:

$$\dim(U\cap V)=\dim(U)+\dim(V)-\dim(U+V)$$

$\because \dim(U+V)\leq n,\quad \dim(U)+\dim(V)>n$

$\therefore \dim(U\cap V)\geq 1$ 故 $U\cap V\neq\{0\}$

5. 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的子空间且 $d=\dim(U)>0$. 证:

(1) 存在 $\mathbb{R}^n$ 中的子空间 V 满足 $\dim(V)=n-1$ 和 $\dim(U\cap V)=d-1$;

(2). 存在 $\mathbb{R}^n$ 中的子空间 W 满足 $\mathbb{R}^n=U\oplus W$.

证 (1) 设 $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\cdots,\vec{u}_d\}$ 是 U 的一组基, 则可将其扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基:

$$\{\vec{u}_1,\cdots,\vec{u}_{d-1},\vec{u}_d,\vec{u}_{d+1},\cdots\vec{v}_n\}$$

令 $V=\{<\vec{u}_1,\cdots,\vec{u}_{d-1},\vec{v}_{d+1},\cdots\vec{v}_n>$ 是由 $\vec{u}_1,\cdots,\vec{u}_{d-1},\vec{v}_{d+1},\cdots,\vec{v}_n$ 张成的子空间. 则 $\dim(V)=n-1$.

$U\cap V=<\vec{u}_1,\cdots,\vec{u}_{d-1}>=$, 则 $\dim(U\cap V)=d-1$.

(2). 将 U 的一组基 $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\cdots,\vec{u}_d\}$ 扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基:

$$\{\vec{u}_1,\cdots,\vec{u}_d,\vec{v}_{d+1},\cdots,\vec{v}_n\}$$

令 $W=<\vec{v}_{d+1},\cdots,\vec{v}_n>$

若 $n=d$, 则 $W=<\vec{0}>$. $U\cap W=\{\vec{0}\}$, $\mathbb{R}^n=U\oplus W$.

若 $n-d>0$, $\dim(U+W)=n$, 故. $\mathbb{R}^n=U+W$.

$\forall x\in U\cap W$, $x\in U$ 且 $x\in W$. 即存在 $\alpha_1,\cdots,\alpha_d$, s.t.

$x=\alpha_1\vec{u}_1+\cdots+\alpha_d\vec{u}_{d+1}$, 同时存在 $\beta_{d+1},\cdots,\beta_n$, s.t.

$x=\beta_{d+1}\vec{v}_{d+1}+\cdots+\beta_n\vec{v}_n$, 则 $\alpha_1\vec{u}_1+\cdots+\alpha_d\vec{u}_{d+1}-\beta_{d+1}\vec{v}_{d+1}-\cdots-\beta_n\vec{v}_n=\vec{0}$

又 $\because \{\vec{u}_1,\cdots,\vec{u}_d,\vec{v}_{d+1},\cdots,\vec{v}_n$ 线性无关, 则

$\alpha_1=\cdots\alpha_d=\beta_{d+1}=\cdots=\beta_n=0$.

故 $x=\vec{0}$, $U\cap W=\{\vec{0}\}$. 故 $\mathbb{R}^n=U\oplus W$. □

1+: 求 $\mathbb{R}^3$ 中平面 $x+2y+z=0$ 中向量的集合的一个基.

将平面看作一个子空间，平面是二维，故只需找两个线性无关向量即可：

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

在 $\mathbb{R}^3$ 中，二维子空间就是过原点的平面.

维数	几何形状
0	原点 $\{0\}$
1	过原点直线
2	过原点平面
3	$\mathbb{R}^3$

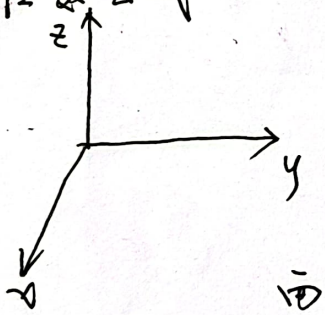
E.g. $U=\{(x,y,0),\ x,y\in\mathbb{R}\}$, $V=\{(x,0,z),\ x,z\in\mathbb{R}\}$ 分别代表 xy 平面和 xz 平面

- 交空间: $U\cap V=\operatorname{span}\{(1,0,0)\}$ x 轴.
- 和空间: $(x,y,z)=(x,y,0)+(x,0,z)$ $\mathbb{R}^3$

维数公式: $\dim(U+V)=\dim(U)+\dim(V)-\dim(U\cap V)$

$=2+2-1$

$=3$



每个平面各有两个独立方向，但共有直线方向被算两次，故减掉一次.

$U+V$ 是整个空间，但 $U\cup V$ 不是. 如 $(0,1,1)\in U+V$，但 $\notin U\cup V$.

2+: 求下列子空间的维数

$$H=\left\{\begin{bmatrix} a-3b+6c \\ 5a+4d \\ b-2c-d \\ 5d \end{bmatrix},\ a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}.$$

解: H 为下列向量的所有线性组合的集合.

$$v_1=\begin{bmatrix}1\\5\\0\\0\end{bmatrix}\quad v_2=\begin{bmatrix}-3\\0\\1\\0\end{bmatrix}\quad v_3=\begin{bmatrix}6\\0\\-2\\0\end{bmatrix}\quad v_4=\begin{bmatrix}0\\4\\-1\\5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

秩为3，故维数为3

一组基：$H=\langle \vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_4} \rangle$