

第一次作业

1. 设 α_i, β_i 是实数, $i = 1, 2, 3, 4$ 。写出满足条件:

$$p(\alpha_i) = \beta_i, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

的实多项式

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

关于 a, b, c, d 的线性方程组、系数矩阵及增广矩阵。

2. 设 n 是正整数。用数学归纳法证明:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \quad \text{和} \quad (x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^i,$$

其中 $\binom{n}{i}$ 是从 n 个元素中取 i 个的组合数。

3. 判线性方程组

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 4x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 1, \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

的相容性和确定性。

4. 设齐次线性方程组 H 有两组解

$$x_1 = \alpha_1, \dots, x_n = \alpha_n \quad \text{和} \quad x_1 = \beta_1, \dots, x_n = \beta_n.$$

证明: 对任意实数 u, v ,

$$x_1 = u\alpha_1 + v\beta_1, \dots, x_n = u\alpha_n + v\beta_n$$

也是 H 的解。