

第三次作业

1. 设 $x \in (0, 1)$, 证明 $f(x) = \tan(\pi(x - \frac{1}{2}))$ 为 $(0, 1)$ 区间到实轴的一个双射.
2. 设 $f(x) = \sin x$, 且定义域为 $\mathbb{R}$.
 - (i) 任给 $y \in [-1, 1]$, 求 $f^{-1}(\{y\})$.
 - (ii) 求由 f 诱导的等价关系 $\sim_f$ 的商集 (等价关系: $x \sim_f x' \iff f(x) = f(x')$).
 - (iii) 刻画上述等价关系诱导的商映射 π 和自然投射 $\bar{f}$.
3. 设 $|$ 是 $\mathbb{Z}^+$ 上的整除关系, 即对 $a, b \in \mathbb{Z}^+, a | b$ 如果存在 $m \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $b = ma$. 验证 $|$ 是偏序, 并举例说明 $|$ 不是全序.
4. 画出下述偏序集的图, 并给出偏序集的极小元、极大元、最小元和最大元:
 - (1) 四元集合 $\{a, b, c, d\}$ 的所有子集组成的集合 (偏序关系由集合的包含关系给出).
 - (2) 整数24的全体正因子的集合 (偏序关系由整除给出).
5. (i) 求出置换

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 8 & 9 & 1 & 2 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

互不相交的循环分解、阶数和逆置换 π^{-1} .

- (ii) 计算置换的乘积

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 3 & 2 & 1 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$