第七次作业

1. 设

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \end{array}$$

验证: ϕ 是线性映射, 并计算 ϕ^2 和 ϕ^3.

2. 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ϕ_A 是矩阵 A 定义的线性映射. 分别计算 $\ker(\phi_A)$ 和 $\mathrm{im}(\phi_A)$ 的一组基底.

3. 设 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的标准基, 线性映射 ϕ 由

$$\phi(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2, \quad \phi(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3, \quad \text{和} \quad \phi(\mathbf{e}_3) = \mathbf{0}$$

确定.

(i) 计算 ϕ 在标准基下的矩阵表示.

(ii) 计算 $\dim(\ker(\phi))$ 和 $\dim(\mathrm{im}(\phi))$.

(iii) 请问 $\ker(\phi) + \mathrm{im}(\phi) = \mathbb{R}^3$ 是否成立? 并说明理由.

4. 设 $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是线性双射. 证明: ϕ^{-1} 也是线性映射.

5. 设 $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是线性满射, W 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间. 证明: $\dim(\phi^{-1}(W)) \geq \dim(W)$.