第八次作业

1. 设 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ 是 $\mathbb{R}^4$ 的标准基， $\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \boldsymbol{\epsilon}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的标准基，线性映射$\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ 由 $\phi(\mathbf{e}_1) = \boldsymbol{\epsilon}_1 - \boldsymbol{\epsilon}_3, \phi(\mathbf{e}_2) = \boldsymbol{\epsilon}_2 - \boldsymbol{\epsilon}_3, \phi(\mathbf{e}_3) = \boldsymbol{\epsilon}_1 + \boldsymbol{\epsilon}_2 - 2\boldsymbol{\epsilon}_3$ 和 $\phi(\mathbf{e}_4) = \boldsymbol{\epsilon}_1 - \boldsymbol{\epsilon}_2$ 确定。

   （i） 写出 ϕ 在 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4; \boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \boldsymbol{\epsilon}_3$ 下的矩阵.

   （ii） 计算 $\dim(\ker(\phi))$ 和 $\dim(\mathrm{im}(\phi))$.

   （iii） 计算 $\phi(\mathbf{u})$ ， 其中 $\mathbf{u} = (1, 1, 1, 0)^t$.

2. 计算

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix},$$

   其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 和

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 4 & -1 & -7 \end{pmatrix}.$$

3. 计算 $\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k$, 其中 k 是任意正整数, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

4. 计算

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix},$$

   并证明任何一个秩等于 1 的 $m \times n$ 的矩阵都可以写成一个 $m \times 1$ 的矩阵和一个 $1 \times n$ 的矩阵之积.