

第一章 预备知识

1 线性代数的起源

代数起源于解方程.

1.1 线性方程(组)

- 设 $\mathbb{R}$ 是实数集合, $a, b \in \mathbb{R}$. 计算 $x \in \mathbb{R}$ 使得

$$ax = b.$$

- (i) $a \neq 0$, 唯一解; 轨迹是实轴上一个点.
- (ii) $a = 0, b \neq 0$, 无解.
- (iii) $a = b = 0$, 不止一个解; 轨迹是整个实轴.

- 设 $a, b, c \in \mathbb{R}$. 求 $x, y \in \mathbb{R}$ 使得

$$ax + by = c.$$

- (i) a, b 不全为零, 不止一个解; 轨迹是实平面上的
一条直线.
- (ii) $a = b = 0, c \neq 0$, 无解.
- (iii) $a = b = c = 0$, 不止一个解; 轨迹是整个实平面.

- 设 $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$. 求实数 $x, y \in \mathbb{R}$ 使得

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}.$$

(i) 唯一解, 轨迹是实平面上两条不平行直线的交点.

(ii) 无解.

(iii) 不止一个解, 两条重合的直线或实平面.

- 设 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. 求实数 $x, y, z \in \mathbb{R}$ 使得

$$ax + by + cz = d.$$

说服自己当 a, b, c 不全为零时, 上述方程的解是三维实空间的一张平面.

一般的实系数线性方程组表述如下:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}. \quad (1)$$

它有 n 个未知数和 m 个方程.

下面我们引入矩阵来简洁地表示线性方程组. 实数上的 m 行 n 列的矩阵($m \times n$ 的矩阵)是指

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

对 $i = 1, 2, \dots, m$, A 的第 i 行(向量)是 $(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n})$, 记为 $\vec{A}_i$. 对 $j = 1, 2, \dots, n$, A 的第 j 列(向量)是

$$\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix}.$$

记为 $\vec{A}^{(j)}$. (2) 中的矩阵可简记为 $(a_{i,j})_{m \times n}$.

注解 1.1 我们用 $O_{m \times n}$ 代表由 m 行和 n 列个 0 组成的矩阵, 称为 $m \times n$ 阶零矩阵.

例 1.2 设矩阵 A 由 (2) 给出. 则对 $i = 1, 2, \dots, m$, $\vec{A}_i$ 是 1 行 n 列的矩阵. 对 $j = 1, 2, \dots, n$, $\vec{A}^{(j)}$ 是 m 行 1 列的矩阵. 特别地, 每个实数都是一行一列的矩阵.

矩阵 (2) 称为方程组 (1) 的系数矩阵. 而矩阵

$$B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}.$$

称为 (1) 的增广矩阵. (1) 称为以 B 为增广矩阵的关于 $x_1, \dots, x_n$ 的线性方程组. 如果我们说 B 是一个线性方程组的增广矩阵, 则该方程组是指 (1).

设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ 使得

$$a_{i,1}\alpha_1 + \cdots + a_{i,n}\alpha_n = b_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

则称列向量

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

是 (1) 的一个解.

例 1.3 写出线性方程组:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 0 \\ y - z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

写出该方程对应的系数矩阵和增广矩阵.

解. 系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

增广矩阵是

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ A & & & 0 \\ & & & 1 \end{array} \right).$$

定义 1.4 如果 (1) 有解, 则称它是相容的 (*compatible*). 否则称之为不相容的. (*incompatible*). 设 (1) 相容. 如果它的解唯一, 则称之为确定的 (*deterministic*). 否则称之为不确定的 (*non-deterministic*).

例 1.5 设

$$\begin{array}{c} \downarrow \ell \\ M_{1 \times (n+1)} = \left(0 \cdots 0 \quad \bullet \quad * \quad \cdots \quad * \quad * \quad * \quad \cdots \quad * \quad * \quad * \quad \cdots \quad * \quad * \right) \end{array}$$

如果 $\ell \leq n$. 则以 M 为增广矩阵的方程是

$$\bullet x_\ell + * x_{\ell+1} + \cdots + * x_n = *.$$

它显然是相容的. 特别地, 方程确定当且仅当 $\ell = n = 1$.

1.2 阶梯型矩阵

如果矩阵 M

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \downarrow \ell_1 & & \downarrow \ell_2 & & \downarrow \ell_k & \\
 \left(\begin{array}{cccccccccccccccc}
 0 \cdots 0 & \bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\
 0 \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \vdots \\
 0 \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * \\
 0 \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \vdots \\
 0 \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
 \end{array} \right)_{m \times n} \quad (3)
 \end{array}$$

其中 $1 \leq \ell_1 < \ell_2 < \cdots < \ell_k \leq \min(m, n)$, $\bullet$ 代表非零实数, $*$ 代表任意实数, 则称 A 是阶梯型矩阵.

非零元素 “ $\bullet$ ” 称为对应行的主元 (*pivot*). 此外, $O_{m \times n}$ 也称为阶梯型矩, 对应 $k = 0$ 的情形.

注解 1.6 在本节中我们将利用下列记号:

设 (3) 中 $k \geq 1, m > 1$ 且 $n > 1$. 去掉 M 中第一行和第 ℓ_1 列的矩阵记为 $\widetilde{M}$. 设

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \tilde{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

再设线性方程组 (E) 的增广矩阵是 $(M|\mathbf{b})_{m \times (n+1)}$. 而线性方程组 $(\widetilde{E})$ 的增广矩阵是 $(\widetilde{M}|\widetilde{\mathbf{b}})_{(m-1) \times n}$.

引理 1.7 (收缩-扩充, *contraction-extension*) 设 $k \geq 1$, $m > 1$ 和 $n > 1$. 利用注释 1.6 中的记号, 我们有

(i) 如果 $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{\ell_1-1} \\ \alpha_{\ell_1} \\ \alpha_{\ell_1+1} \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ 是 (E) 的解, 则 $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{\ell_1-1} \\ \alpha_{\ell_1+1} \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ 是 $(\widetilde{E})$ 的解.

(ii) 如果 $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{\ell_1-1} \\ \alpha_{\ell_1+1} \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ 是 $(\widetilde{E})$ 的解, 则存在唯一的实

数 λ 使得 $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{\ell_1-1} \\ \lambda \\ \alpha_{\ell_1+1} \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ 是 (E) 的解.

证明. (i) 因为未知数在 x_{ℓ_1} 在 (E) 的第二个到第 k 个方程中不出现, 所以 $\mathbf{v}$ 是 (E) 的解蕴含 $\mathbf{w}$ 是 $(\tilde{E})$ 的解.

(ii) 把

$$x_1 = \alpha_1, \dots, x_{\ell_1-1} = \alpha_{\ell_1-1}, x_{\ell_1+1} = \alpha_{\ell_1+1}, \dots, x_n = \alpha_n$$

代入 (E) 的第一个方程得 $\bullet x_{\ell_1} + * \alpha_{\ell_1+1} + \dots + * \alpha_n = *$. 该方程显然有唯一解, 记为 λ . 则 $\mathbf{u}$ 是 (E) 的解. $\square$

命题 1.8 设 M 由 (3) 给出, 线性方程组 (E) 的增广矩阵是 $(M|\mathbf{b})$, 其中 $\mathbf{b}$ 是由 $b_1, \dots, b_n$ 组成的 $m \times 1$ 矩阵. 则

(i) (E) 相容当且仅当 $b_{k+1} = \dots = b_n = 0$.

(ii) (E) 确定当且仅当 (E) 相容且 $k = n$.

证明. (i) 设 (E) 相容. 注意到 (E) 的最后 $m - k$ 个方程是

$$0 = b_{k+1}, \dots, 0 = b_n.$$

因为 (E) 相容, 所以 $b_{k+1} = \cdots = b_n = 0$.

反之, 设 $b_{k+1} = \cdots = b_n = 0$.

如果 $k = 0$, 则 (E) 中方程都是 $0 = 0$. 故 (E) 相容.

设 $k > 0$ 且 $m = 1$. 则 (E) 的增广矩阵是

$$(0 \ \dots \ 0 \ \bullet \ * \ \dots \ * \ | \ b_1).$$

则 (E) 相容 (见例 1.5) .

设 $k > 0$ 且 $n = 1$. 则 $k = 1$. 故 (E) 的增广矩阵是

$$\left(\begin{array}{c|c} \bullet & b_1 \\ O_{(m-1) \times 1} & O_{(m-1) \times 1} \end{array} \right).$$

于是, (E) 相容.

从此假设 $k \geq 1$, $m > 1$ 和 $n > 1$. 我们对 k 用归纳法.

当 $k = 1$ 时, (E) 的增广矩阵是

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 \ \dots \ 0 \ \bullet \ * \ \dots \ * & b_1 \\ O_{(m-1) \times n} & O_{(m-1) \times 1} \end{array} \right).$$

根据例 1.5, (E) 相容.

设 $k > 1$ 且结论对 $n - 1$ 成立. 则注释 1.6 中的线性方程组 $(\tilde{E})$ 相容. 根据引理 1.7 (ii), (E) 相容.

(ii) 设 (E) 相容且 $n = k$. 则 $k \geq 1$ 且

$$M = \begin{pmatrix} \bullet & * & * & \cdots & * \\ 0 & \bullet & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \bullet \\ O_{(m-n) \times n} \end{pmatrix}.$$

如果 $m = 1$, 则 $k = 1$. 故 $n = 1$. 此时 (E) 是 $\bullet x = b_1$, 确定. 从此假设 $m > 1$. 我们对 k 用归纳法. 当 $k = 1$ 时, $n = 1$. 根据 (i), (E) 的增广矩阵是

$$\left(\begin{array}{c|c} \bullet & b_1 \\ O_{(m-1) \times 1} & O_{(m-1) \times 1} \end{array} \right).$$

于是, (E) 确定.

设 $k > 1$ 且结论对 $k - 1$ 个主元的阶梯型矩阵成立成立. 则注释 1.6 中的线性方程组 $(\tilde{E})$ 确定. 设

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

是 (E) 的两个解. 根据引理 1.7 (i),

$$\tilde{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \tilde{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

是 $(\tilde{E})$ 的两个解. 由归纳假设可知 $\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{w}}$, 即

$$\alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n.$$

把 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{w}$ 代入 (E) 的第一个方程得

$$\bullet \alpha_1 + * \alpha_2 + \dots + * \alpha_n = b_1 \quad \text{和} \quad \bullet \beta_1 + * \alpha_2 + \dots + * \alpha_n = b_1.$$

故 $\alpha_1 = \beta_1$. 从而, $\mathbf{v} = \mathbf{w}$. 即 (E) 确定.

反之, 设 (E) 确定. 则 (E) 确定相容且 $k > 0$. 如果 $m = 1$, 则 $k = 1$. 故 (E) 是

$$0x_1 + \dots + 0x_{\ell_1-1} + \bullet x_{\ell_1} + *x_{\ell_1+1} + \dots + *x_n = b_1.$$

因为 (E) 确定, 所以 $n = 1$.

从此设 $m > 1$ 并对 k 归纳. 如果 $k = 1$, 则矩阵

$$M = \begin{pmatrix} 0 \cdots, 0 & \bullet & * & \cdots & * \\ O_{(m-1) \times n} \end{pmatrix}.$$

于是, (E) 只有一个非平凡方程

$$0x_1 + \dots + 0x_{\ell_1-1} + \bullet x_{\ell_1} + *x_{\ell_1+1} + \dots + *x_n = b_1.$$

因为 (E) 确定, 所以 $n = 1$, 即 $n = k$.

设 $k > 1$ 且结论对 $k - 1$ 个主元的阶梯型矩阵成立. 根据引理 1.7 (i) 和 (ii), 线性方程组 $(\tilde{E})$ 确定. 于是, 于是, $k - 1 = n - 1$. 由此可知, $n = k$. $\square$

1.3 矩阵的初等行变换

设 (L) 和 (L') 是两个实系数 n 元线性方程组. 如果或者 (L) 和 (L') 都不相容, 或者 (L) 和 (L') 有相同的解, 则称它们是等价的. 本节的目的 是把一个线性方程组化为一个等价的线性方程组, 而后者的相容性和确定性是容易判断的.

设 $A = (a_{i,j})_{m \times n}$ 是 $m \times n$ 的实矩阵, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

- (i) 把 A 中第 i 行和第 j 行互换位置得到矩阵 A' . 则称 A' 是通过第 I 类初等行变换由 A 得到的. 此时 A' 的第 i 行和第 j 行分别是

$$(a_{j,1}, \dots, a_{j,n}) \quad \text{和} \quad (a_{i,1}, \dots, a_{i,n}).$$

其它行与 A 相同.

- (ii) 设 $i \neq j$, α 是实数. 把 A 的第 i 行通乘 α 后加到第 j 行上得到矩阵 A' . 则称 A' 是通过第 II 类初等行变换由 A 得到的. 时 A' 的第 j 行是

$$(\alpha a_{i,1} + a_{j,1}, \dots, \alpha a_{i,n} + a_{j,n}).$$

其它行与 A 相同.

- (iii) 设 α 是非零实数. 把 A 的第 i 行通乘 α 得到矩阵 A' . 则称 A' 是通过第 III 类初等行变换由 A 得到的. 此时 A' 的第 i 行是

$$(\alpha a_{i,1}, \dots, \alpha a_{i,n}).$$

其它行与 A 相同.

I、II、III 类初等行变换统称初等行变换.

引理 1.9 设 n 元线性方程组 (L) 的增广矩阵是 B , 对 B 进行一次初等行变换得到矩阵 B' . 再设 B' 对应的线性方程组是 (L') . 则两方程组等价.

证明. 当 B' 是通过第 I 类初等行变换由 B 得到的. 则 (L') 是把 L 中两个方程互换位置得到的方程组. 于是, (L) 和 (L') 显然等价. 当 B' 是通过第 III 类初等行变换由 B 得到的. 则 (L') 是把 L 中某个方程通乘一个非零实数得到的方程组. 于是, 两方程组等价.

下面我们考虑第二类初等变换. 设

$$B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}.$$

则 (L) 是

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{j,1}x_1 + a_{j,2}x_2 + \cdots + a_{j,n}x_n = b_j \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{array} \right. .$$

而 (L') 是

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i \\ \vdots \\ (\alpha a_{i,1} + a_{j,1})x_1 + (\alpha a_{i,2} + a_{j,2})x_2 + \cdots + (\alpha a_{i,n} + a_{j,n})x_n = \alpha b_i + b_j \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{array} \right. .$$

下面我们来证明 (L) 和 (L') 同解. 设

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \beta_1 \\ x_2 = \beta_2 \\ \vdots \\ x_n = \beta_n \end{array} \right. \quad (4)$$

是 L 的一个解. 代入 (L') 的第 j 个方程得

$$\sum_{k=1}^n (\alpha a_{i,k} + a_{j,k}) \beta_k = \alpha \sum_{k=1}^k a_{i,k} \beta_k + \sum_{k=1}^n a_{j,k} \beta_k = \alpha b_i + b_j.$$

注意到 (L) 和 (L') 只有第 j 个方程不同. 故 (4) 是 (L') 的解.

反之, 设 (4) 是 (L') 的解. 方程组 (L) 中只有第 j 个方程与 (L') 中不一样, 把解代入该方程得:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_{j,k} \beta_k &= \sum_{k=1}^n (\alpha a_{i,k} + a_{j,k} - \alpha a_{i,k}) \beta_k \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^n (\alpha a_{i,k} + a_{j,k}) \beta_k}_{L' \text{ 中第 } j \text{ 个方程}} - \underbrace{\alpha \sum_{k=1}^k a_{i,k} \beta_k}_{L' \text{ 中第 } i \text{ 个方程}} \\ &\stackrel{\because j \neq i}{=} \alpha b_i + b_j - \alpha b_i = b_j. \end{aligned}$$

故 (4) 也是 (L) 的解. $\square$

命题 1.10 设 n 元线性方程组 (L) 的增广矩阵是 B , 对 B 进行有限次初等行变换得到矩阵 B' . 再设 B' 对应的线性方程组是 (L') . 则两方程组等价.

证明. 有限次利用引理 1.9 即得. $\square$

命题 1.11 设 A 是 $m \times n$ 的实矩阵. 通过有限次第 I 类和第 II 类初等行变换, 我们可以把 A 化为一个阶梯型矩阵.

证明. 设 A 不是零矩阵. 我们对 m 归纳. 当 $m = 1$ 时, A 本身是阶梯型的. 故命题成立. 设 $m > 1$ 且命题对 $m - 1$ 成立. 设 ℓ 列是 A 中第一个含有非零数的列, 其中一个非零数等于 a 并出现在第 k 行. 我们把第一行和第 k 行对调得到矩阵

$$B = \begin{matrix} \downarrow^\ell \\ \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & a & * \cdots * \\ 0 \cdots 0 & b_2 & * \cdots * \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \cdots 0 & b_m & * \cdots * \end{pmatrix} \end{matrix},$$

其中 $b_2, \dots, b_m$ 是实数. 把第一行通乘 $-b_2 a^{-1}$ 加到第二行上得

$$C = \begin{matrix} \downarrow^\ell \\ \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & a & * \cdots * \\ 0 \cdots 0 & 0 & * \cdots * \\ 0 \cdots 0 & b_3 & * \cdots * \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \cdots 0 & b_m & * \cdots * \end{pmatrix} \end{matrix},$$

类似地, 我们把第一行通乘 $-b_i a^{-1}$ 加到第 i 行上, $i =$

$3, 4, \dots, m$ 得

$$D = \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & \overset{\downarrow \ell}{a} & * \cdots * \\ 0 \cdots 0 & 0 & * \cdots * \\ 0 \cdots 0 & 0 & * \cdots * \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \cdots 0 & 0 & * \cdots * \end{pmatrix}.$$

设 D' 是由 D 中第二行、第三行、 $\dots$ 、第 m 行组成得矩阵. 则 D' 有 $m - 1$ 行.

根据归纳假设, 通过有限次第 I 类和第 II 类初等行变换, 我们可以把 D' 化为一个阶梯型矩阵 D'' , 其中前 ℓ 列中得元素都等于零. 而对 D' 做初等行变换相当于对 D 做初等行变换. 于是, 通过有限次第 I 类和第 II 类初等行变换, 我们把 D 化为阶梯矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & a & * \cdots * \\ & D'' & \end{pmatrix}. \quad \square$$

例 1.12 利用初等行变换把矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

化为阶梯型.

解.

$$A \xrightarrow{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-\frac{8}{3}r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \square$$

例 1.13 线性方程组 L_B 和 L_C 分别由增广矩阵 B 和 C

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 10 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 6 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

给出. 判断 L_B 和 L_C 的相容性和确定性

解. 对 B 做初等行变换把 L_B 的系数矩阵化为阶梯型得

$$B \xrightarrow{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 10 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-\frac{8}{3}r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

故 L_B 不相容.

通过对 C 做初等行变换把 L_C 的系数矩阵化为阶梯型得

$$C \xrightarrow{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 6 & 3 & 6 & 9 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-3r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

故 L_C 相容但不确定. $\square$

注解 1.14 设线性方程组 (L) 的系数矩阵是 $m \times n$ 的. 当 $m < n$ 时, (L) 或者不相容或者不确定.

1.4 齐次线性方程组

实系数线性方程组 (H)

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = 0 \end{cases}.$$

称为齐次线性方程组. 显然, H 由它的系数矩阵唯一确定且 $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ 是它的一个解. 称之为 H 的平凡解或零解. 故 H 必然相容.

根据注释 1.14, 我们有

推论 1.15 设齐次线性方程组 (H) 中 $m < n$. 则该方程组有非平凡解.

证明. 根据注释 1.14, (H) 不确定. 故它有非平凡解. $\square$

注解 1.16 判断 (H) 是否确定只需对其系数矩阵施行 *Gauss* 消去法. 这是因为在进行矩阵初等行变换时, 增广矩阵的最后一列始终由零组成.

命题 1.17 设线性方程组 (L) 和齐次线性方程组 (H) 的系数矩阵都是 $n \times n$ 的矩阵. 则 (L) 确定当且仅当 (H) 确定.

证明. 设 (L) 确定. 根据命题 1.8 (ii), 1.10 和命题 ??, 通过有限次初等行变换, 我们求得矩阵 $B = (M|\mathbf{b})$ 使得 (L) 等价于以 B 为增广矩阵的线性方程组 (L') , 其中

$$M = \begin{pmatrix} \bullet & * & * & \cdots & * \\ & \bullet & * & \cdots & * \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \bullet \end{pmatrix} \quad (5)$$

是上三角方阵, $\mathbf{b}$ 是由实数 $b_1, \dots, b_n$ 组成的列向量. 则 (H) 等价于以 M 为系数矩阵的齐次线性方程组. 根据命题 1.8 (ii), (H) 确定.

反之, 设 (H) 确定. 根据命题 1.8 (ii), 1.10 和命题 ??, 通过有限次初等行变换, 我们求得形如 (5) 中的矩阵 M 使得 (H) 等价于以 M 为系数矩阵的线性方程组 (H') , 则 (L) 等价于以 M 为系数矩阵的线性方程组 (L') . 根据命题 1.8 (ii), (L) 确定. $\square$

1.5 二阶行列式

行列式 (determinant) 在一定条件下可以通过线性方程组的系数表示该方程组解. 我们在这里讨论二阶行列式的情

形. 设实系数二阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

它的行列式定义为 $ad - bc$, 记为 $\det(A)$ 或 $|A|$.

命题 1.18 关于未知数 x, y 的实系数线性方程组

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

是确定的当且仅当其系数矩阵的行列式非零. 此时方程组的解等于

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

证明. 设方程组是确定的. 则 a, c 不全为零. 不妨设 $a \neq 0$. 由高斯消去法得

$$\begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & b & e \\ 0 & d - a^{-1}cb & f - a^{-1}ce \end{pmatrix}.$$

由第一讲定理 2.5 (ii) 可知, $d - a^{-1}cb \neq 0$. 于是, $ad - cb \neq 0$.

反之, 设 $ad - cb \neq 0$. 则 a, c 不全为零. 不妨设 $a \neq 0$. 于是, 上述的消元过程和结果不变, 且 $d - a^{-1}cb \neq 0$. 由第

一讲定理 2.5 (ii) 可知, 原方程组是确定的. 此时

$$y = \frac{f - a^{-1}ce}{d - a^{-1}cb} = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

代入第一个方程得

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}. \quad \square$$