# 第二章　矩阵

## 9　矩阵求逆

**引理 9.1** 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times s}, B \in \mathbb{R}^{s\times n}$. 设 $B = (B_1, \ldots, B_k)$, 其中 $B_\ell \in \mathbb{R}^{s\times n_\ell}$, $\ell = 1, \ldots, k$. 则 $AB = (AB_1, \ldots, AB_k)$.

证明. 由列向量乘积公式(第二章第四讲注解 6.17 (ii))

$$AB = (A\vec{B}^{(1)}, \ldots, A\vec{B}^{(n)}).$$

故 $AB = \left( A\underbrace{\left(\vec{B}^{(1)}, \ldots, \vec{B}^{(n_1)}\right)}_{B_1}, \ldots, A\underbrace{\left(\vec{B}^{(n_1+\cdots+n_{k-1}+1)}, \ldots, \vec{B}^{(n)}\right)}_{B_k} \right)$. □

**命题 9.2** 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 可逆, $B = (A, E_n) \in \mathbb{R}^{n\times 2n}$, $P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 如果 $PB = (E_n|Q)$, 则 $P = Q = A^{-1}$.

证明. 由上述引理可知, $PB = P(A, E_n) = (PA, P)$. 于是, $PA = E_n$ 和 $P = Q$. 故 $P = A^{-1}$. □

设 $A$ 可逆. 则 $A^{-1}$ 是若干初等矩阵 $C_1, \ldots, C_k$ 之积. 由上述命题可知: $(C_1 \cdots C_k)(A|E_n) = (E_n|A^{-1})$. 于是, 对 $(A|E_n)$ 做初等行变换必然可以把它的前 $n$ 列组成的子矩阵化为单位矩阵, 后 $n$ 列组成的子矩阵就是 $A^{-1}$.

**例 9.3** 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. 计算 $A^{-1}$.

解. 我们计算

$$
\begin{aligned}
(A|E) &\xrightarrow{F_{1,2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{F_{3,1}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{F_2(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{F_{3,2}(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -2 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{F_{1,2}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -2 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{F_{1,3}(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -2 & 1 \end{array}\right).
\end{aligned}
$$

于是, $A^{-1} = F_{1,3}(1)F_{1,2}(-1)F_{3,2}(1)F_2(\frac{1}{2})F_{3,1}(-2)F_{1,2}$.

另一种常见的矩阵求逆的的方法如下: 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 设 $k$ 是最小的正整数使得 $A^0, A^1, \ldots, A^k$ 在 $\mathbb{R}$ 上“线性相

关". 即存在 $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ 且 $\alpha_k \neq 0$ 使得

$$\alpha_k A^k + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 E = O. \tag{1}$$

我们有下述结论:

**命题 9.4** *利用以上记号, 则 $A$ 可逆当且仅当 $\alpha_0 \neq 0$. 此时 $A^{-1} = -\alpha_0^{-1}(\alpha_1 E + \cdots + \alpha_k A^{k-1})$.*

*证明.* 设 $\alpha_0 \neq 0$. 由 (1) 可知,

$$A(\alpha_1 E + \cdots + \alpha_k A^{k-1}) = -\alpha_0 E \Longrightarrow A\underbrace{(-\alpha_0^{-1})(\alpha_1 E + \cdots + \alpha_k A^{k-1})}_{B} = E.$$

于是, $A$ 可逆且 $B = A^{-1}$ (第二章第五讲命题 7.18).

反之, 设 $A$ 可逆. 假设 $\alpha_0 = 0$. 则

$$A(\alpha_k A^{k-1} + \cdots + \alpha_2 A + \alpha_1 E) = O.$$

两侧同乘 $A^{-1}$ 得到

$$\alpha_k A^{k-1} + \cdots + \alpha_2 A + \alpha_1 E = O.$$

因为 $\alpha_k \neq 0$, 我们得到与 $k$ 的极小性相矛盾的结果. □

**例 9.5** 设 $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 确定 $A_n$ 是否可逆并当可逆时计算 $A_n^{-1}$.

解. 注意到 $E_n$ 和 $A_n$ 在 $\mathbb{R}$ 上“线性无关”. 计算

$$
\begin{aligned}
A_n^2 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} n & n-4 & n-4 & \cdots & n-4 & n-4 \\ n-4 & n & n-4 & \cdots & n-4 & n-4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-4 & n-4 & n-4 & \cdots & n & n-4 \\ n-4 & n-4 & n-4 & \cdots & n-4 & n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (2n-4)-(n-4) & n-4 & \cdots & n-4 \\ n-4 & (2n-4)-(n-4) & \cdots & n-4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-4 & n-4 & \cdots & (2n-4)-(n-4) \end{pmatrix} \\
&= (2n-4)E_n - (n-4)A_n.
\end{aligned}
$$

我们得到 $A_n^2 + (n-4)A_n - (2n-4)E_n = O$. 由命题 9.4 可知, $A_2$ 不可逆且 $n \neq 2$ 时, $A_n$ 可逆. 此时, $A_n^{-1} = \frac{1}{2n-4}(A_n + (n-4)E_n)$.

# 10 矩阵分块

## 10.1 基本公式

**引理 10.1** 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times s}$ 和 $B \in \mathbb{R}^{s\times n}$. 令

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_p \end{pmatrix}, \quad B = \Big(B_1, \ldots, B_q\Big).$$

则 $AB = (A_k B_\ell)_{p\times q}$.

证明. 断言：

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 B \\ \vdots \\ A_p B \end{pmatrix}.$$

断言的证明. 根据引理 9.1. 我们计算

$$(AB)^t = B^t A^t = B^t(A_1^t, \ldots, A_p^t) = (B^t A_1^t, \ldots, B^t A_p^t).$$

于是,

$$AB = (B^t A_1^t, \ldots, B^t A_p^t)^t = \begin{pmatrix} (B^t A_1^t)^t \\ \vdots \\ (B^t A_p^t)^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 B \\ \vdots \\ A_p B \end{pmatrix}.$$

断言成立.

由此和引理 9.1 可知,

$$AB = \begin{pmatrix} A_1B \\ \vdots \\ A_pB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1(B_1,\ldots,B_q) \\ \vdots \\ A_p(B_1,\ldots,B_q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1B_1 & \ldots & A_1B_q \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_pB_1 & \ldots & A_pB_q \end{pmatrix}. \quad \square$$

**引理 10.2** 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times s}$ 和 $B \in \mathbb{R}^{s\times n}$. 令

$$A = (A_1,\ldots,A_k) \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_k \end{pmatrix},$$

其中 $A_i \in \mathbb{R}^{m\times s_i}$, $B_i \in \mathbb{R}^{s_i\times n}$, $i = 1,2,\ldots,k$. 则

$$AB = A_1B_1 + \cdots + A_kB_k.$$

证明. 设 $A = (a_{i,\ell})_{m\times s}$ 和 $B = (b_{\ell,j})_{s\times n}$.

先考虑 $k = 2$ 的情形. 令

$$C = (c_{i,j})_{m\times n} = AB \quad \text{和} \quad D = (d_{i,j})_{m\times n} = A_1B_1 + A_2B_2.$$

则对任意 $i \in \{1,\ldots,m\}, j \in \{1,\ldots,n\}$,

$$d_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{s_1} a_{i,\ell}b_{\ell,j} + \sum_{\ell=s_1+1}^{s_1+s_2} a_{i,\ell}b_{\ell,j} = \sum_{\ell=1}^{s} a_{i,\ell}b_{\ell,j} = c_{i,j}.$$

结论成立.

设 $k > 2$ 且结论对 $k-1$ 成立. 记

$$\tilde{A} = (A_1,\ldots,A_{k-1}), \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_{k-1} \end{pmatrix}.$$

则 $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{m\times(s-s_n)}$, $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{(s-s_n)\times n}$. 于是

$$AB = \tilde{A}\tilde{B} + A_kB_k = A_1B_1 + \cdots + A_{k-1}B_{k-1} + A_kB_k,$$

其中第一个等式来自 $k = 2$ 时的结论, 第二个等式来自归纳假设. □

**定理 10.3** 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times s}$ 和 $B \in \mathbb{R}^{s\times n}$. 令

$$A = \begin{pmatrix} A_{1.1} & \cdots & A_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{\ell,1} & \cdots & A_{\ell,k} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k,1} & \cdots & B_{k,p} \end{pmatrix},$$

其中 $A_{i,q} \in \mathbb{R}^{m_i\times s_q}$, $B_{q,j} \in \mathbb{R}^{s_q\times n_j}$, $i = 1, 2, \ldots, \ell$, $j = 1, 2, \ldots, p$, $q = 1, \ldots, k$. 则

$$AB = \left( \sum_{q=1}^{k} A_{i,q}B_{q,j} \right)_{1\le i\le \ell, 1\le j\le p}.$$

证明. 设

$$A_i = \begin{pmatrix} A_{i,1}, \ldots, A_{i,k} \end{pmatrix}, \ i = 1, \ldots, \ell, \quad B_j = \begin{pmatrix} B_{1,j} \\ \vdots \\ B_{k,j} \end{pmatrix}, \ j = 1, \ldots, p.$$

根据引理 10.1,

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_\ell \end{pmatrix} (B_1, \ldots, B_p) = (A_iB_j)_{1\le i\le \ell, 1\le j\le p}.$$

根据引理 10.2,

$$A_iB_j = \begin{pmatrix} A_{i,1}, \ldots, A_{i,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{1,j} \\ \vdots \\ B_{k,j} \end{pmatrix} = \sum_{q=1}^{k} A_{i,k}B_{k,j}. \quad \square$$

**例 10.4** 设分块对角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} D_1 & O & \cdots & O \\ O & D_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & D_k \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),$$

其中 $D_i \in \mathrm{M}_{n_i}(\mathbb{R})$, $i = 1, 2, \ldots, k$. 则对任意 $m \in \mathbb{Z}^+$,

$$A^m = \begin{pmatrix} D_1^m & O & \cdots & O \\ O & D_2^m & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & D_k^m \end{pmatrix}.$$

**例 10.5** 设分块对角矩阵

$$P = \begin{pmatrix} M & O \\ O & N \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R}),$$

其中 $M \in \mathrm{M}_p(\mathbb{R}), N \in \mathrm{M}_q(\mathbb{R})$, $p + q = m$. 设

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

其中 $A_{1,1}$ 有 $p$ 行, $A_{2,2}$ 有 $q$ 行. 则

$$PA = \begin{pmatrix} MA_{1,1} & MA_{1,2} \\ NA_{2,1} & NA_{2,2} \end{pmatrix}.$$

类似地, 设

$$Q = \begin{pmatrix} S & O \\ O & T \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),$$

其中 $S$ 的行数与 $A_{1,1}$ 的列数相同, $T$ 的行数与 $A_{2,2}$ 的列数相同. 则

$$AQ = \begin{pmatrix} A_{1,1}S & A_{1,2}T \\ A_{2,1}S & A_{2,2}T \end{pmatrix}.$$

**例 10.6** 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $X$ 是 $n$ 阶未知方阵. 解矩阵方程

$$AXA = A.$$

解. 由打洞引理, 存在可逆矩阵 $P, Q \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 使得

$$A = P \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q.$$

代入原方程得

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

其中 $Y=QXP$. 设

$$Y=\begin{pmatrix} Y_{1,1} & Y_{1,2} \\ Y_{2,1} & Y_{2,2} \end{pmatrix},$$

其中 $Y_{1,1}\in \mathrm{M}_r(\mathbb{R})$. 则上述方程化简为:

$$\begin{pmatrix} Y_{1,1} & O \\ O & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

于是 $Y_{1,1}=E_r$, 其它元素任意. 故

$$X=Q^{-1}\begin{pmatrix} E_r & Y_{1,2} \\ Y_{2,1} & Y_{2,2} \end{pmatrix}P^{-1},$$

其中 $Y_{1,2}\in\mathbb{R}^{r\times(n-r)}$, $Y_{2,1}\in\mathbb{R}^{(n-r)\times r}$, $Y_{2,2}\in\mathrm{M}_{n-r}(\mathbb{R})$ 是任意矩阵.

## 10.2 矩阵秩的（不）等式

**引理 10.7** 设矩阵 $M$ 具有以下四种分块形式之一

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} C & A \\ B & O \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} O & A \\ B & C \end{pmatrix}.$$

则 $\mathrm{rank}(M)\geq\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)$ 且当 $C=O$ 时等号成立.

证明. 这四种形式可以通过第一类初等变换和转置互相转化. 因为初等变换和转置不改变矩阵的秩, 所以不妨假设

$$M = \begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}.$$

设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $B \in \mathbb{R}^{k\times \ell}$. 设 $\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(p)}$ 是 $V_c(A)$ 的一组基, $\vec{B}^{(1)}, \ldots, \vec{B}^{(q)}$ 是 $V_c(B)$ 的一组基.

断言. 向量 $\vec{M}^{(1)}, \ldots, \vec{M}^{(p)}, \vec{M}^{(n+1)}, \ldots, \vec{M}^{(n+q)}$ 线性无关.

断言的证明. 设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_q \in \mathbb{R}$ 使得

$$\alpha_1\vec{M}^{(1)} + \cdots + \alpha_p\vec{M}^{(p)} + \beta_1\vec{M}^{(n+1)} + \cdots + \beta_q\vec{M}^{(n+q)} = \mathbf{0}_{m+k}.$$

则

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} \vec{A}^{(1)} \\ \vec{C}^{(1)} \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_p \begin{pmatrix} \vec{A}^{(p)} \\ \vec{C}^{(p)} \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m \\ \vec{B}^{(1)} \end{pmatrix} + \cdots + \beta_q \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m \\ \vec{B}^{(q)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m \\ \mathbf{0}_k \end{pmatrix}.$$

于是，$\alpha_1\vec{A}^{(1)} + \cdots + \alpha_p\vec{A}^{(p)} = \mathbf{0}_m$. 故 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0$. 进而 $\beta_1\vec{B}^{(n+1)} + \cdots + \beta_q\vec{B}^{(n+q)} = \mathbf{0}_k$. 故 $\beta_1 = \cdots = \beta_q = 0$. 断言成立.

由断言可知, $\operatorname{rank}(M) \geq p + q = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$.

设 $C = O_{k\times n}$. 当 $j \in \{1, \ldots, n\}$ 时,

$$\vec{M}^{(j)} = \begin{pmatrix} \vec{A}^{(j)} \\ \mathbf{0}_k \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{M}^{(j)} \in \langle \vec{M}^{(1)}, \ldots, \vec{M}^{(p)} \rangle.$$

类似地, 当 $j \in \{n+1, \ldots, n+\ell\}$ 时,

$$\vec{M}^{(j)} \in \langle \vec{M}^{(n+1)}, \ldots, \vec{M}^{(n+q)} \rangle.$$

根据断言, $\mathrm{rank}(M) = p + q = \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$. □

**推论 10.8** *设上述引理中 $A$ 和 $B$ 是可逆方阵, 则 $M$ 也是可逆方阵.*

*证明.* 设 $A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$ 和 $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 则 $M \in \mathrm{M}_{m+n}(\mathbb{R})$. 则 $\mathrm{rank}(M) \leq m + n$ (第二章第三讲例 3.10). 由上述引理, $\mathrm{rank}(M) \geq m + n$. 故 $\mathrm{rank}(M) = m + n$. 于是, $M$ 可逆(第二章第五讲定理 7.14). □

**例 10.9** *设 $A \in \mathbb{R}^{m\times s}$ 和 $B \in \mathbb{R}^{s\times n}$. 证明*

$$\mathrm{rank}(AB) \geq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B) - s.$$

*证明.* 只要证 $\mathrm{rank}(AB) + s \geq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$. 设

$$M = \begin{pmatrix} AB & O \\ O & E_s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+s)\times(n+s)}.$$

根据引理 *10.7*, $\mathrm{rank}(M) = \mathrm{rank}(AB) + s$. 我们计算

$$N := \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_s \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AB & O \\ O & E_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & A \\ O & E_s \end{pmatrix},$$

$$P := N \begin{pmatrix} E_n & O \\ -B & E_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & A \\ O & E_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & O \\ -B & E_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & A \\ -B & E_s \end{pmatrix}.$$

因为矩阵乘法不可能增加秩, 所以 $\operatorname{rank}(M) \geq \operatorname{rank}(P)$. 由引理 *10.7* 得出,

$$\operatorname{rank}(M) \geq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(-B) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$

**例 10.10** *(Sylvester* 等式*)* 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. 证明*:*

$$\operatorname{rank}(E_m + AB) + n = \operatorname{rank}(E_n + BA) + m.$$

证明. 设

$$M = \begin{pmatrix} E_m + AB & O \\ O & E_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m+n}(\mathbb{R}).$$

我们计算

$$N := \underbrace{\begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix}}_{C_1} M = \begin{pmatrix} E_m + AB & A \\ O & E_n \end{pmatrix},$$

$$P := N \underbrace{\begin{pmatrix} E_m & O \\ -B & E_n \end{pmatrix}}_{C_2} = \begin{pmatrix} E_m & A \\ -B & E_n \end{pmatrix},$$

$$Q := \underbrace{\begin{pmatrix} E_m & O \\ B & E_n \end{pmatrix}}_{C_3} P = \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n + BA \end{pmatrix},$$

$$R := Q\underbrace{\begin{pmatrix} E_m & -A \\ O & E_n \end{pmatrix}}_{C_4} = \begin{pmatrix} E_m & O \\ O & E_n + BA \end{pmatrix}.$$

注意到 $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathrm{M}_{m+n}(\mathbb{R})$ 且引理 *10.7* 蕴含

$$\mathrm{rank}(C_i) \geq \mathrm{rank}(E_m) + \mathrm{rank}(E_n) = m + n.$$

故 $C_1, C_2, C_3, C_4$ 都满秩. 根据第二章第九讲推论 *6.27*,

$$\mathrm{rank}(M) = \mathrm{rank}(R).$$

再由引理 *10.7* 可知,

$$\mathrm{rank}(M) = \mathrm{rank}(R) \implies \mathrm{rank}(E_m + AB) + n = \mathrm{rank}(E_n + BA) + m.$$

# 第三章　行列式

## 1　多重线性斜对称函数

在本节中, 设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准基.

### 1.1　$\mathbb{R}^n$ 上的多重线性函数

**定义 1.1** 映射:

$$\begin{array}{rccc} f: & \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{m} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m) & \mapsto & f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m) \end{array}$$

称为 $m$ 重线性的, 如果对任意 $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ 和 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 我们有

$$\begin{aligned} & f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_m) \\ & = \alpha f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}, \mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_m) \\ & + \beta f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{v}, \mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_m). \end{aligned}$$

**例 1.2** 一重线性函数就是 $\mathbb{R}^n$ 上的线性函数. 设

$$\alpha_1 = f(\mathbf{e}_1), \ldots, \alpha_n = f(\mathbf{e}_n) \in \mathbb{R}.$$

则

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, \ldots, x_n)^t & \mapsto & \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n. \end{array}$$

**例 1.3** 设

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x},\mathbf{y}) &\mapsto \det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

则 $f$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的二重线性函数.

验证. 设 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,

$$\mathbf{u}=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2.$$

则

$$\begin{aligned} f(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v},\mathbf{y}) &= \det\begin{pmatrix} \alpha u_1+\beta v_1 & y_1 \\ \alpha u_2+\beta v_2 & y_2 \end{pmatrix} \\ &= (\alpha u_1+\beta v_1)y_2-(\alpha u_2+\beta v_2)y_1 \\ &= \alpha(u_1y_2-u_2y_1)+\beta(v_1y_2-v_2y_1) \\ &= \alpha\det\begin{pmatrix} u_1 & y_1 \\ u_2 & y_2 \end{pmatrix}+\beta\det\begin{pmatrix} v_1 & y_1 \\ v_2 & y_2 \end{pmatrix} \\ &= \alpha f(\mathbf{u},\mathbf{y})+\beta f(\mathbf{v},\mathbf{y}). \end{aligned}$$

类似地, 我们可验证 $f(\mathbf{x},\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v})=\alpha f(\mathbf{x},\mathbf{u})+\beta f(\mathbf{x},\mathbf{v})$.

故 $f$ 是二重线性函数.

**例 1.4** 设 $f$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的二重线性函数, $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$, $\alpha,\beta,\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. 展开 $f(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v},\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y})$.

解. 利用多重线性计算:

$$\begin{aligned}
&f(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v},\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y})\\
&=\alpha f(\mathbf{u},\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y})+\beta f(\mathbf{v},\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y})\quad(\text{关于第一个变元线性})\\
&=\alpha(\lambda f(\mathbf{u},\mathbf{x})+\mu f(\mathbf{u},\mathbf{y}))+\beta(\lambda f(\mathbf{v},\mathbf{x})+\mu f(\mathbf{v},\mathbf{y}))\\
&\qquad(\text{关于第二个变元线性})\\
&=\alpha\lambda f(\mathbf{u},\mathbf{x})+\alpha\mu f(\mathbf{u},\mathbf{y})+\beta\lambda f(\mathbf{v},\mathbf{x})+\beta\mu f(\mathbf{v},\mathbf{y}).
\end{aligned}$$

特别地

$$f(\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{x}+\mathbf{y})=f(\mathbf{u},\mathbf{x})+f(\mathbf{u},\mathbf{y})+f(\mathbf{v},\mathbf{x})+f(\mathbf{v},\mathbf{y})$$

和

$$f(\alpha\mathbf{u},\alpha\mathbf{x})=\alpha^2 f(\mathbf{u},\mathbf{x}).$$

**引理 1.5** 设 $f$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上 $m$ 重线性函数, $k\in\{1,\dots,m\}$. 则

$$f(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_{k-1},\mathbf{0},\mathbf{x}_{k+1},\dots,\mathbf{x}_m)=0.$$

证明. 我们计算

$$\begin{aligned}
&f(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_{k-1},\mathbf{0},\mathbf{x}_{k+1},\dots,\mathbf{x}_m)\\
&=f(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_{k-1},\mathbf{0}+\mathbf{0},\mathbf{x}_{k+1},\dots,\mathbf{x}_m)\\
&=f(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_{k-1},\mathbf{0},\mathbf{x}_{k+1},\dots,\mathbf{x}_m)+f(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_{k-1},\mathbf{0},\mathbf{x}_{k+1},\dots,\mathbf{x}_m)\\
&\Longrightarrow f(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_{k-1},\mathbf{0},\mathbf{x}_{k+1},\dots,\mathbf{x}_m)=0.\quad\square
\end{aligned}$$

令

$$f(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \ldots, \mathbf{e}_{j_m}) = a_{j_1, j_2, \ldots, j_m}, \tag{2}$$

其中 $j_1, j_2, \ldots, j_m \in \{1, 2, \ldots, n\}$. 我们利用这 $n^m$ 个实数来计算一个 $m$ 重线性函数的表达式. 再设

$$\mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^{n} x_{i,j}\mathbf{e}_j, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

则

$$\begin{aligned}
&f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m) \\
&= f\left(\sum_{j_1=1}^{n} x_{1,j_1}\mathbf{e}_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{n} x_{2,j_2}\mathbf{e}_{j_2}, \ldots, \sum_{j_m=1}^{n} x_{m,j_m}\mathbf{e}_{j_m}\right) \\
&= \sum_{j_1=1}^{n} x_{1,j_1} f\left(\mathbf{e}_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{n} x_{2,j_2}\mathbf{e}_{j_2}, \ldots, \sum_{j_m=1}^{n} x_{m,j_m}\mathbf{e}_{j_m}\right) \\
&= \sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n} x_{1,j_1}x_{2,j_2} f\left(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \ldots, \sum_{j_m=1}^{n} x_{m,j_m}\mathbf{e}_{j_m}\right) \\
&\quad \vdots \\
&= \sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\cdots\sum_{j_m=1}^{n} x_{1,j_1}x_{2,j_2}\cdots x_{m,j_m} f\left(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \ldots, \mathbf{e}_{j_m}\right)
\end{aligned}$$

故

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m) = \sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\cdots\sum_{j_m=1}^{n} a_{j_1, j_2, \ldots, j_m} x_{1,j_1}x_{2,j_2}\cdots x_{m,j_m}. \tag{3}$$

## 1.2 $\mathbb{R}^n$ 上的多重斜对称线性函数

**定义 1.6** 映射:

$$\begin{aligned} f:\ \underbrace{\mathbb{R}^n\times\cdots\times\mathbb{R}^n}_{m} &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m) &\mapsto\ f(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m) \end{aligned}$$

称为$m$ 重斜对称的, 如果对任意 $i,j\in\{1,2,\ldots,m\}$,

$$\begin{aligned} &f(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{i-1},\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_{i+1},\ldots,\mathbf{x}_{j-1},\mathbf{x}_j,\mathbf{x}_{j+1},\ldots,\mathbf{x}_m)\\ &=-f(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{i-1},\mathbf{x}_j,\mathbf{x}_{i+1},\ldots,\mathbf{x}_{j-1},\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_{j+1},\ldots,\mathbf{x}_m). \end{aligned}$$

例 1.3 中二阶行列式是 2 重斜对称的. 这是因为

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{pmatrix}=-\det\begin{pmatrix} y_1 & x_1\\ y_2 & x_2\end{pmatrix}.$$

**引理 1.7** 设 $f$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 $m$ 重斜对称函数. 如果 $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m$ 中有两个向量相等, 则 $f(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m)=0$.

证明. 不妨设 $\mathbf{x}_1=\mathbf{x}_2:=\mathbf{u}$. 因为

$$f(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3,\ldots,\mathbf{x}_m)=-f(\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_3,\ldots,\mathbf{x}_m),$$

所以

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{x}_3,\ldots,\mathbf{x}_m)&=-f(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{x}_3,\ldots,\mathbf{x}_m)\\ &\Longrightarrow 2f(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{x}_3,\ldots,\mathbf{x}_m)=0. \end{aligned}$$

因为 $2 \neq 0$, 所以 $f(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_m) = 0$. □

设 $f$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上 $n$ 重斜对称线性函数. 此时 $m = n$，我们利用公式 (2) 和 (3) 推导 $f$ 的表达式. 由引理 1.5 可知, 如果下标 $i_1, \ldots, i_n$ 中有两个相同, 则

$$a_{i_1,\ldots,i_n} = 0.$$

若 $i_1, \ldots, i_n$ 两两不同, 则这些下标对应一个置换

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}.$$

即 $(i_1, \ldots, i_n) = (\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$. 再根据上周公式 (7), 我们有

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(n)} x_{\sigma(1),1} x_{\sigma(2),2} \cdots x_{\sigma(n),n}. \tag{4}$$

设 $w = f(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$. 我们来研究 $w$ 和 $a_{\sigma(1),\ldots,\sigma(n)}$ 之间的关系. 根据上周讲义中公式 (6),

$$a_{\sigma(1),\ldots,\sigma(n)} = f(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{e}_{\sigma(n)}).$$

下面我们证明:

断言. $a_{\sigma(1),\ldots,\sigma(n)} = \epsilon_\sigma w$.

证明. 设 $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_k$, 其中 $\tau_1, \ldots, \tau_k$ 是对换. 如果 $k = 1$,

则可设 $\sigma = (i, j)$. 于是,

$$\begin{aligned} a_{\sigma(1),\ldots,\sigma(n)} &= f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{i+1}, \ldots, \mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{j+1}, \ldots, \mathbf{x}_n) \\ &= -f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \ldots, \mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j+1}, \ldots, \mathbf{x}_n) \\ &= -w. \end{aligned}$$

断言在 $k = 1$ 时成立. 设 $k>1$ 且断言对 $k-1$ 成立. 考虑 $k$ 时. 令 $\pi = \tau_2 \cdots \tau_k$. 则 $\sigma = \tau_1 \pi$. 我们有

$$\begin{aligned} a_{\sigma(1),\ldots,\sigma(n)} &= f(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{e}_{\sigma(n)}) \\ &= f(\mathbf{e}_{\tau_1\pi(1)}, \ldots, \mathbf{e}_{\tau_1\pi(n)}) \\ &= -f(\mathbf{e}_{\pi(1)}, \ldots, \mathbf{e}_{\pi(n)}) \\ &= -\epsilon_\pi f(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \quad \text{(归纳假设)} \\ &= \epsilon_\sigma w. \end{aligned}$$

断言成立.

由此断言和 (4) 可知

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n) = w \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_\sigma x_{1,\sigma(1)} x_{2,\sigma(2)} \cdots x_{n,\sigma(n)}. \tag{5}$$

于是, 每个 $\mathbb{R}^n$ 上的 $n$ 重斜线性函数都具有形式 (5) 且具有上述形式的函数必然 $n$ 重斜线性, 其中 $w$ 可取任意实数.