

第一章 预备知识

4.3 偶置换和奇置换

长度等于 2 的循环称为对换(transposition). 对换的逆就是其本身.

引理 4.19 任何一个置换都是若干个对换之积.

证明. 根据循环分解定理, 只要证明任何一个循环可以写成若干个对换之积即可. 我们验证:

$$(i_1 i_2 \cdots i_k) = (i_k i_{k-1}) \cdots (i_k i_2)(i_k i_1), \quad (1)$$

其中 $k > 2$. 令 $\sigma = (i_k i_{k-1}) \cdots (i_k i_2)(i_k i_1)$.

对于任意 $j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$, $(i_1, \dots, i_k)$ 和 σ 都把 j 映成 j . 设 $\ell \in \{1, 2, \dots, k-2\}$. 则

$$\begin{aligned} \sigma(i_\ell) &= \underbrace{(i_k i_{k-1}) \cdots (i_k i_{\ell+2})}_{\text{identity}} \underbrace{(i_k i_{\ell+1})}_{\text{identity}} (i_k i_\ell) (i_\ell) \\ &= \underbrace{(i_k i_{k-1}) \cdots (i_k i_{\ell+2})}_{\text{identity}} (i_{\ell+1}) \\ &= i_{\ell+1}. \end{aligned}$$

而

$$\sigma(i_{k-1}) = (i_k i_{k-1}) (i_{k-1}) = i_k \quad \text{和} \quad \sigma(i_k) = i_1.$$

等式 (1) 成立. $\square$

例 4.20 把

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

写成对换之积.

解. 由循环分解和上述引理可知:

$$\sigma = (124)(56) = (42)(41)(56).$$

引理 4.21 设 $\sigma, \tau \in S_n$ 两个对换, $\sigma = (st)$ 且 $\sigma \neq \tau$. 则 S_n 中存在两个对换 σ' 和 τ' 满足

$$\sigma'(s) = s, \tau'(s) \neq s \text{ 且 } \tau\sigma = \tau'\sigma'.$$

证明. 设 $\tau = (uv)$.

情形 1. 如果 $\{s, t\} \cap \{u, v\} = \emptyset$, 则令 $\tau' = \sigma$ 和 $\sigma' = \tau$. 由第三讲引理 6.14 可知, $\tau\sigma = \tau'\sigma'$.

情形 2. 设 $\tau = (su)$. 则 $u \neq t$. 取 $\sigma' = (tu)$, $\tau' = (st)$ 即可.

情形 3. 设 $\tau = (tu)$. 则 $u \neq s$. 取 $\sigma' = \tau$, $\tau' = (su)$ 即可. $\square$

引理 4.22 设 $\tau_1, \dots, \tau_k \in S_n$ 是对换. 如果 $\tau_1 \cdots \tau_k = e$, 则 k 是偶数.

证明. 我们先证明下列断言:

断言. 设 $k > 2$. 则 e 可以写成 $k - 2$ 个对换之积.

断言的证明. 如果 $\tau_{k-1} = \tau_k$, 则 $\tau_{k-1}\tau_k = e$. 我们有 $\tau_1 \cdots \tau_{k-2} = e$. 断言成立.

否则 $\tau_{k-1} \neq \tau_k$. 设 $s \in \{1, 2, \dots, n\}$ 满足 $\tau_k(s) \neq s$. 根据引理 4.21, 存在对换 $\tau'_{k-1}, \tau'_k \in S_n$ 满足 $\tau'_k(s) = s$, $\tau'_{k-1}(s) \neq s$ 且 $\tau'_{k-1}\tau'_k = \tau_{k-1}\tau_k$. 于是 $e = \tau_1 \cdots \tau_{k-2}\tau'_{k-1}\tau'_k$. 特别地, 最右侧的对换不移动 s .

下面考虑 τ_{k-2}, τ'_{k-1} . 如果 $\tau_{k-2}\tau'_{k-1} = e$, 则 e 是 $k-2$ 个对换之积. 否则, 引理 4.21 蕴含存在对换 τ^*_{k-2} 和 τ^*_{k-1} 满足 $\tau^*_{k-1}(s) = s$, $\tau^*_{k-2}(s) \neq s$ 和 $\tau_{k-2}\tau'_{k-1} = \tau^*_{k-2}\tau^*_{k-1}$. 于是

$$e = \tau_1 \cdots \tau^*_{k-2}\tau^*_{k-1}\tau'_k.$$

特别地, 最右侧的两个对换都不移动 s , 但 τ^*_{k-2} 移动 s .

以此类推, 我们要么证明 e 是 $k-2$ 个对换之积; 要么得出 $e = \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_k$, 其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in S_n$ 是对换, 满足

$$\lambda_1(s) \neq s, \text{ 且 } \lambda_2(s) = \cdots \lambda_k(s) = s.$$

但这意味着 $e(s) \neq s$. 矛盾. 断言成立.

反复利用断言可知, k 是偶数. $\square$

定理 4.23 设 $\sigma \in S_n$. 设 $\sigma = \lambda_1 \cdots \lambda_k = \mu_1 \cdots \mu_m$, 其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_m$ 都是对换. 则 k 和 m 的奇偶性相同.

证明. 由穿衣脱衣规则可知, $e = \lambda_1 \cdots \lambda_k \mu_m^{-1} \cdots \mu_1^{-1}$. 因为对换的逆是其本身, 所以上周讲义中引理 6.23 蕴含 $k+m$ 是偶数. 于是, k 和 m 的奇偶性相同. $\square$

定义 4.24 设 $\sigma \in S_n$. 如果 σ 可以写成奇数个对换之积, 则称 σ 是奇置换. 否则称为偶置换. 特别地, e 是偶置换. 奇置换的符号定义为 -1 , 偶置换的符号为 1 . 置换 σ 的符号记为 ε_σ .

上述定理说明置换的符号是良定义的.

推论 4.25 设 $\sigma \in S_n$ 且 $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_k$, 其中 $\tau_1, \dots, \tau_k$ 是循环. 则 σ 的奇偶性与整数 $\sum_{i=1}^k (\text{ord}(\tau_i) - 1)$ 相同. 即 $\varepsilon_\sigma = (-1)^{\sum_{i=1}^k (\text{ord}(\tau_i) - 1)}$.

证明. 设 $\tau = (i_1 \dots i_m)$. 根据上周讲义引理 6.20 证明中的(2)式, $\tau = (i_m i_{m-1}) \cdots (i_m i_1)$. 于是, $\varepsilon_\tau = (-1)^{m-1}$. 再根据第三讲引理 6.9 可知,

$$m = \text{ord}(\tau) \implies \varepsilon_\tau = (-1)^{\text{ord}(\tau)-1}.$$

由上述引理和注解可知

$$\varepsilon_\sigma = (-1)^{\sum_{i=1}^k (\text{ord}(\tau_i) - 1)}. \quad \square$$

例 4.26 确定下列置换的阶数并判定其奇偶性:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 8 & 6 & 10 & 7 & 4 & 5 & 9 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

解. 计算得 $\pi = (1364\underline{10})(289)(57)$. 于是

$$\text{ord}(\pi) = \text{lcm}(5, 3, 2) = 30.$$

进而 $\epsilon_\pi = (-1)^{4+2+1} = -1$. 故 π 是奇置换.

引理 4.27 设 $\sigma, \tau \in S_n$. 则 $\epsilon_{\sigma\tau} = \epsilon_\sigma \epsilon_\tau$.

证明. 注意到两个同号置换之积是偶置换, 而两个异号置换之积是奇置换. $\square$

注解 4.28 反复应用上述定理可知, 对 $\sigma_1, \dots, \sigma_k \in S_n$,

$$\epsilon_{\sigma_1 \dots \sigma_k} = \epsilon_{\sigma_1} \cdots \epsilon_{\sigma_k}.$$

记号. 所有 S_n 中偶置换的集合记为 A_n .

命题 4.29 令 A_n 是 S_n 中所有偶置换的集合. 证明: 当 $n > 1$ 时, $\text{card}(A_n) = n!/2$.

证明. 设 B_n 是 S_n 中所有奇置换的集合. 定义:

$$\begin{array}{ccc} \phi: A_n \longrightarrow B_n & \text{和} & \psi: B_n \longrightarrow A_n \\ \sigma \mapsto (12)\sigma & & \tau \mapsto (12)\tau \end{array}.$$

由注解 4.28 可知, ϕ 和 ψ 都是良定义的. 注意到:

$$\psi \circ \phi(\sigma) = (12)(12)\sigma = \sigma \quad \text{且} \quad \phi \circ \psi(\tau) = (12)(12)\tau = \tau.$$

故 $\psi \circ \phi = \text{id}_{A_n}$ 且 $\phi \circ \psi = \text{id}_{B_n}$. 由第二讲命题 4.14 可知, ϕ 是双射. 故 $\text{card}(A_n) = \text{card}(B_n)$. 又因为

$$S_n = A_n \cup B_n \quad \text{且} \quad A_n \cap B_n = \emptyset.$$

于是, $\text{card}(A_n) = n!/2$. $\square$

第二章 矩阵

1 线性相关性

1.1 坐标空间

设

$$\mathbb{R}^{n \times 1} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

称为 n 维列向量(坐标)空间. 设

$$\mathbb{R}^{1 \times n} = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

称为 n 维行向量(坐标)空间. 这学期我们通常在列空间中描述线性代数的内容. 于是, 记 $\mathbb{R}^{n \times 1}$ 为 $\mathbb{R}^n$, 其中的元素称为向量. 特别地

$$\mathbf{0}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

称为 $\mathbb{R}^n$ 中的零向量. 当 n 从上下文可确定时, $\mathbf{0}_n$ 记为 $\mathbf{0}$.

设

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

是 $\mathbb{R}^n$ 中的向量. 我们定义

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

则向量的加法满足下列规律: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$,

- (i) (交换律) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$;
- (ii) (结合律) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$;
- (iii) (加法单位元) $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$;
- (iv) (加法逆) $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, 其中 $-\mathbf{x}$ 是把 $\mathbf{x}$ 中每个坐标反号后得到的向量.

再设 $\lambda \in \mathbb{R}$. 我们定义数乘

$$\lambda \mathbf{x} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

则“标量”与向量的数乘满足下列规律: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

- (i) $(\lambda\mu)\mathbf{x} = \lambda(\mu\mathbf{x})$;
- (ii) $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

进而, 加法和数乘满足下列分配律: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$,

$$(i) \quad \lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y};$$

$$(ii) \quad (\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}.$$

例 1.1 设

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

则

$$2\mathbf{x} + 3\mathbf{y} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

例 1.2 设以 $x_1, \dots, x_n$ 为实未知数的线性方程组的增广矩阵是 $B = (A|\mathbf{b})$, 其中 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. 则该方程组可以表示为

$$x_1 \vec{A}^{(1)} + \dots + x_n \vec{A}^{(n)} = \mathbf{b}.$$

1.2 线性组合, 线性相关和线性无关

定义 1.3 设 $\mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$. 如果存在 $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ 使得

$$\mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k,$$

则称 $\mathbf{w}$ 是 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ (在 $\mathbb{R}$ 上) 的线性组合.

当 $\mathbf{w} = \alpha \mathbf{v}$, 其中 $\alpha \in \mathbb{R}$, 我们说 $\mathbf{w}$ 和 $\mathbf{v}$ “平行”. 特别地, $\mathbf{0}_n$ 与 $\mathbb{R}^n$ 中的向量都平行.

例 1.4 设 $\mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$. 则 $A = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \in \mathbb{R}^{n \times k}$ 和 $B = (A|\mathbf{w}) \in \mathbb{R}^{n \times (k+1)}$. 根据例 1.2, 以 B 为增广矩阵的 k 元线性方程组相容当且仅当 $\mathbf{w}$ 是 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 的线性组合.

例 1.5 设

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

判定 $\mathbf{z}$ 是不是 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 的线性组合.

解. 考虑增广矩阵

$$B = (\mathbf{x}, \mathbf{y}|\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

由 *Gauss* 消去法可知,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

于是, B 对应的线性方程组不相容. 故 $\mathbf{z}$ 不是 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 的线性组合 (第一章第一讲定理 2.5).

记号. 在 $\mathbb{R}^n$ 中,

$$\mathbf{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

注解 1.6 对任意

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

我们有 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$. 即 $\mathbb{R}^n$ 中的任意向量都是 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ 的线性组合.

定义 1.7 设 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$. 如果存在 $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, 不全为零, 使得

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0},$$

则称 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ (在 $\mathbb{R}$) 上线性相关. 否则, 我们称 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ (在 $\mathbb{R}$) 上线性无关.

由上述定义可知, 一个向量 $\mathbf{v}$ 线性相关当且仅当 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. 如果 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 中有一个零向量, 则它们必然线性相关. 两个向量线性无关当且仅当它们不平行.

例 1.8 设 $A = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \in \mathbb{R}^{n \times k}$. 根据例 1.2, 以 A 为系数矩阵的 k 元齐次线性方程组有非平凡解当且仅当 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 的线性相关.

例 1.9 设

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

判定 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ 是否线性相关.

解. 设 $A = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$. 由 *Gauss* 消去法可知

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -9 \\ 0 & -3 & -9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是, 以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组有非平凡解. 故 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ 线性相关 (第一章第一讲定理 2.7).

例 1.10 证明: $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$ 线性无关.

证明. 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ 使得 $\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n = \mathbf{0}$. 则

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0.$$

故 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 线性无关.

下面的命题总结了关于线性组合、线性相关和无关的基本事实.

命题 1.11 设 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$.

- (i) 如果存在 $i \in \{1, \dots, k\}$ 使得 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i$ 线性相关, 则 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_k$ 也线性相关;
- (ii) 如果 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_k$ 线性无关, 则对任意 $i \in \{1, \dots, k\}$ 使得 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i$ 也线性无关;
- (iii) 向量 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 线性相关当且仅当这些向量中的某个向量是其它向量的线性组合;
- (iv) 再设 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ 且 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 线性无关. 则 $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 线性相关当且仅当存在唯一的 $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ 使得

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k.$$

证明. (i) 因为 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i$ 线性相关, 所以存在 $\alpha_1, \dots, \alpha_i \in \mathbb{R}$, 不全为零, 使得

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}.$$

于是,

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_i \mathbf{v}_i + 0\mathbf{v}_{i+1} + \dots + 0\mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

因为在 $\alpha_1, \dots, \alpha_i$ 中已有非零实数, 所以 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_k$ 线性相关.

(ii) 是 (i) 的逆否命题.

(iii) 设向量 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 线性相关. 则存在 $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, 不全为零, 使得 $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$. 不妨设 $\alpha_1 \neq 0$. 则 $\mathbf{v}_1 = -(\alpha_1^{-1} \alpha_2) \mathbf{v}_2 - \dots - (\alpha_1^{-1} \alpha_k) \mathbf{v}_k$.

反之不妨设 $\mathbf{v}_k$ 是 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}$ 的线性组合. 则存在 $\beta_1, \dots, \beta_{k-1} \in \mathbb{R}$ 使得 $\mathbf{v}_k = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \beta_{k-1} \mathbf{v}_{k-1}$. 于是, $\beta_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \beta_{k-1} \mathbf{v}_{k-1} + (-1) \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$. 故 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_k$ 线性相关.

(iv) 设 $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 线性相关. 则存在 $\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, 不全为零, 使得 $\beta \mathbf{v} + \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$.

则 $\beta \neq 0$. 否则, 我们有 $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ 且 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ 不全为零. 从而推出 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 线性相关, 矛盾. 故

$$\mathbf{v} = -(\beta^{-1} \alpha_1) \mathbf{v}_1 - \dots - (\beta^{-1} \alpha_k) \mathbf{v}_k.$$

再设 $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mu_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \mu_k \mathbf{v}_k$. 其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{R}$. 则

$$(\lambda_1 - \mu_1) \mathbf{v}_1 + \dots + (\lambda_k - \mu_k) \mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

因为 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 线性无关, 所以 $\lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_k = \mu_k$.

逆命题由 (iii) 直接可得. $\square$

以下引理是建立维数概念的关键.

引理 1.12 (线性组合引理) 设 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k; \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_\ell$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两组向量. 设对任意 $j \in \{1, 2, \dots, \ell\}$, $\mathbf{w}_j$ 是 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 的线性组合. 如果 $\ell > k$, 则 $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_\ell$ 线性相关.

证明. 设 $\mathbf{w}_j = \sum_{i=1}^k \alpha_{i,j} \mathbf{v}_i$, 其中 $\alpha_{i,j} \in \mathbb{R}, j \in \{1, 2, \dots, \ell\}$. 再设 $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ 是待定的实数. 则

$$\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j \mathbf{w}_j = \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^k \alpha_{i,j} \mathbf{v}_i \right) \quad (2)$$

$$= \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{i=1}^k (\lambda_j \alpha_{i,j}) \mathbf{v}_i \quad (\text{分配律和结合律}) \quad (3)$$

$$= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} (\lambda_j \alpha_{i,j}) \mathbf{v}_i \quad (\text{和号互换}) \quad (4)$$

$$= \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j \alpha_{i,j} \right) \mathbf{v}_i \quad (\text{分配律}) \quad (5)$$

考虑以 $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ 为未知数的齐次线性方程组

$$\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j \alpha_{i,j} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

根据 $\ell > k$ 和第一章第一讲推论 1.15 (红色推论), 上述方程组有非零解 $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell \in \mathbb{R}$. 由 (5) 可知, $\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j \mathbf{w}_j = \mathbf{0}$. 故 $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_\ell$ 线性相关. $\square$

2 坐标空间中的子空间

定义 2.1 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空子集. 如果对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ 和 $\alpha \in \mathbb{R}$,

(i) (加法封闭性) $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in U$,

(ii) (数乘封闭性) $\alpha \mathbf{x} \in U$.

则称 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的子空间 (*subspace*).

例 2.2 坐标空间 $\mathbb{R}^n$ 有两个平凡子空间 $\{\mathbf{0}\}$ 和 $\mathbb{R}^n$.

例 2.3 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 则 $\mathbf{0} \in U$.

证明. 设 $\mathbf{x} \in U$. 则 $\mathbf{0} = 0\mathbf{x} \in U$. $\square$

2.1 基本性质

命题 2.4 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空子集. 则下列命题等价.

(i) U 是子空间;

(ii) U 中任意两个向量的线性组合仍在 U 中;

(iii) 对任意 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in U$, $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ 的任意线性组合都在 U 中.

证明. “(i) $\implies$ (ii)” 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 是 U 中任意的两个向量, α, β 是任意两个实数. 如果 U 是子空间, 则 $\alpha\mathbf{x}, \beta\mathbf{y} \in U$ (数乘封闭性). 从而 $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in U$ (加法封闭性). 反之, 设 $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in U$. 取 $\alpha = \beta = 1$ 得到加法封闭性, 取 $\beta = 0$ 得到数乘封闭性. 故 U 是子空间.

“(ii) $\implies$ (iii)” 当 $k = 1, 2$ 时, (ii) 蕴含 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ 的所有线性组合都在 U 中. 设 $k > 2$ 时且 U 中任何 $k - 1$ 个向量的线性组合都在 U 中. 对任意 $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_k \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{u}_k \in U$, 我们有

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{u}_i = \left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \mathbf{u}_i \right) + \alpha_k \mathbf{u}_k \in U.$$

“(iii) $\implies$ (i)” 由线性组合的定义直接得出. $\square$

例 2.5 设 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. 则 $\{\lambda\mathbf{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ 是子空间.

设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. 则 $\{\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ 是子空间.

例 2.6 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 其对应的 n 元齐次线性方程组记为 H . 验证 $\text{sol}(H)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的子空间.

证明. (参照见第一次作业习题 4) 设

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

是 H 的两个解. 则

$$\alpha_1 \vec{A}^{(1)} + \cdots + \alpha_n \vec{A}^{(n)} = \mathbf{0}_m, \quad \beta_1 \vec{A}^{(1)} + \cdots + \beta_n \vec{A}^{(n)} = \mathbf{0}_m.$$

令 λ, μ 是两个实数, $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}$. 则

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_n + \mu\beta_n \end{pmatrix}.$$

而

$$\sum_{j=1}^n (\lambda\alpha_j + \mu\beta_j) \vec{A}^{(j)} = \lambda \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \vec{A}^{(j)} \right) + \mu \left(\sum_{j=1}^n \beta_j \vec{A}^{(j)} \right) = \mathbf{0}_m.$$

故 $\mathbf{u} \in \text{sol}(H)$. 根据命题 2.4, $\text{sol}(H)$ 是子空间. $\square$

例 2.7 设 $p, q \in \mathbb{Q}$ 不全为零,

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mid p\alpha + q\beta = 0, \alpha, \beta \in \mathbb{Q} \right\}.$$

S 是否是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间?

答. 不是. 因为

$$\begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix} \in S \quad \text{但} \quad \sqrt{2} \begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix} \notin S. \quad \square$$