

第二章 矩阵

2.2 子空间的交与和

命题 2.8 设 Λ 是一个指标集, 对任意 $\lambda \in \Lambda$, U_λ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的子空间. 则 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ 也是子空间.

证明. 设 $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. 因为 $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in U_\lambda$, 所以 $\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} \in U_\lambda$ (命题 1.16). 由此可知, $\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$. 故 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ 是子空间 (命题 1.16). $\square$

例 2.9 考虑齐次线性方程组 H

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n = 0 \end{cases}$$

设 $V_i = \text{sol}(a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n = 0)$, $i = 1, 2, \dots, m$. 则 $\text{sol}(H) = \bigcap_{i=1}^m V_i$. $\square$

设 $S_1, \dots, S_k$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的非空子集. 我们定义 $S_1, \dots, S_k$ 的和为

$$S_1 + \cdots + S_k := \{\mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_k \mid \mathbf{v}_1 \in S_1, \dots, \mathbf{v}_k \in S_k\}.$$

命题 2.10 设 $U_1, \dots, U_k$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 则 $U_1 + \cdots + U_k$ 也是子空间.

证明. 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \sum_{i=1}^k U_i$. 则存在 $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i \in U_i, i = 1, 2, \dots, k$, 使得 $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \mathbf{u}_i$ 和 $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^k \mathbf{v}_i$. 则对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} = \alpha \left(\sum_{i=1}^k \mathbf{u}_i \right) + \beta \left(\sum_{i=1}^k \mathbf{v}_i \right) = \sum_{i=1}^k (\alpha \mathbf{u}_i + \beta \mathbf{v}_i).$$

根据命题 1.16, $\alpha \mathbf{u}_i + \beta \mathbf{v}_i \in U_i, i = 1, 2, \dots, k$. 我们得到 $\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} \in \sum_{i=1}^k U_i$. 故 $\sum_{i=1}^k U_i$ 是子空间. $\square$

例 2.11 设 $U_1, \dots, U_k$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 证明

$$U_i \subset U_1 + \dots + U_k, \quad i = 1, \dots, k.$$

证明. 不妨证明 $U_1 \subset U_1 + \dots + U_k$. 注意到

$$U_1 = \{ \mathbf{u}_1 + \underbrace{\mathbf{0} + \dots + \mathbf{0}}_{k-1} \mid \mathbf{u}_1 \in U_1 \} \subset U_1 + \dots + U_k. \quad \square$$

例 2.12 设 U, V 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 如果 $U \subsetneq V$ 且 $V \subsetneq U$, 则 $U \cup V$ 不是子空间.

证明. 假设 $U \cup V$ 是子空间. 设 $\mathbf{x} \in U \setminus V$ 和 $\mathbf{y} \in V \setminus U$. 则 $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in U \cup V$. 不妨设 $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in U$. 则

$$\mathbf{y} = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) - \mathbf{x} \in U.$$

矛盾. $\square$

定义 2.13 设 U, V 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 如果 $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$, 则称 $U + V$ 是直和. 记为 $U \oplus V$.

命题 2.14 设 U, V 是 $\mathbb{R}^n$ 中子空间. 则 $U + V$ 是直和当且仅当对任意 $\mathbf{x} \in U + V$, 存在唯一的 $\mathbf{u} \in U, \mathbf{v} \in V$ 使得

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}.$$

证明. 设 $U + V$ 是直和且 $\mathbf{x} \in U + V$. 设

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u}' + \mathbf{v}',$$

其中 $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in U, \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$. 则

$$\mathbf{u} - \mathbf{u}' = \mathbf{v}' - \mathbf{v} \implies \mathbf{u} - \mathbf{u}' \in U \cap V.$$

因为 $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$, 所以 $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$. 进而 $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$.

反之, 假设 $U + V$ 不是直和. 则存在非零向量 $\mathbf{x} \in U \cap V$. 故 $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{x} + (-\mathbf{x})$. 与要求的唯一性矛盾. $\square$

2.3 子空间的生成

定义 2.15 设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 的非空子集. 则由 S 中元素的所有线性组合构成的集合称为由 S 生成的子空间. 记为 $\langle S \rangle$. 集合 S 中的元素称为子空间 $\langle S \rangle$ 的一组生成元.

命题 2.16 设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 的非空子集.

(i) $\langle S \rangle$ 是子空间;

(ii) 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间且 $S \subset U$. 则 $\langle S \rangle \subset U$.

证明. (i) 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \langle S \rangle$. 则存在 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\ell \in S$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_\ell \in \mathbb{R}$ 使得

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{u}_i \quad \text{和} \quad \mathbf{y} = \sum_{j=1}^{\ell} \beta_j \mathbf{v}_j.$$

则对任意 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 我们有

$$\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y} = \lambda \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{u}_i \right) + \mu \left(\sum_{j=1}^{\ell} \beta_j \mathbf{v}_j \right) = \sum_{i=1}^k (\lambda \alpha_i) \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^{\ell} (\mu \beta_j) \mathbf{v}_j.$$

故 $\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y} \in \langle S \rangle$. 根据命题 1.18 $\langle S \rangle$ 是子空间.

(ii) 因为 $S \subset U$, 所以 $\langle S \rangle \subset U$ (命题 1.18). $\square$

当 S 是有限集 $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ 时, $\langle S \rangle$ 也记作 $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$.

例 2.17 设 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. 则

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \{ \lambda \mathbf{v} \mid \lambda \in \mathbb{R} \} \quad \text{和} \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \{ \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}.$$

例 2.18 设 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \mathbb{R}^2$,

$$V_1 = \langle \mathbf{e}_1 \rangle, \quad V_2 = \langle \mathbf{e}_2 \rangle \quad \text{和} \quad V_3 = \langle \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \rangle.$$

计算 $(V_1 + V_2) \cap V_3$ 和 $V_1 \cap V_3 + V_2 \cap V_3$.

解. 注意到 $V_1 + V_2 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = \mathbb{R}^2$. 故 $(V_1 + V_2) \cap V_3 = V_3$.

而 $V_1 \cap V_3 = V_2 \cap V_3 = \{\mathbf{0}\}$. 我们有

$$V_1 \cap V_3 + V_2 \cap V_3 = \{\mathbf{0}\} + \{\mathbf{0}\} = \{\mathbf{0}\}.$$

例 2.19 设 U, W 是 $\mathbb{R}^n$ 中的子空间. 则 $U + W = \langle U \cup W \rangle$.
证明. 显然 $U \cup W \subset U + W$. 根据命题 2.16 (ii),

$$\langle U \cup W \rangle \subset U + W.$$

反之, 设 $\mathbf{x} \in U + W$. 则存在 $\mathbf{u} \in U$ 和 $\mathbf{w} \in W$ 使得 $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$. 于是, $\mathbf{x} \in \langle U \cup W \rangle$, 即 $U + W \subset \langle U \cup W \rangle$. $\square$

例 2.20 设 $\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的向量. 如果 $\mathbf{u}$ 是 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 的线性组合且 $\mathbf{v}_i$ 是 $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l$ 的线性组合, $i = 1, \dots, k$. 证明: $\mathbf{u}$ 是 $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l$ 的线性组合.
证明. 因为 $\mathbf{v}_i \in \langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l \rangle$, $i = 1, \dots, k$, 所以

$$\mathbf{u} \in \langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l \rangle.$$

故 $\mathbf{u}$ 是 $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l$ 的线性组合. $\square$

3 基底和维数

3.1 极大线性无关组

定义 3.1 设 $S \subset \mathbb{R}^n$. 有限非空子集 $T \subset S$ 称为 S 的一个极大线性无关组. 如果

- (i) T 中的向量线性无关;
- (ii) 对任意 $\mathbf{v} \in S$, $\mathbf{v} \in \langle T \rangle$.

注解 3.2 如果 S 的一个极大线性无关组 $T = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d\}$. 我们经常略去集合符号简称 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$ 是 S 的一个极大线性无关组.

命题 3.3 设 $S \subset \mathbb{R}^n$.

(i) (可扩充性) 设 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ 是 S 中线性无关的向量. 则存在 S 中极大线性无关组且它包含 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$.

(ii) (等势性) 设 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\ell \in S$ 线性无关, $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$ 是 S 的极大线性无关组. 则 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\ell$ 是 S 的极大线性无关组当且仅当 $\ell = m$.

证明. (i) 如果对任意 $\mathbf{u} \in S$, $\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ 线性相关, 则 $\mathbf{u} \in \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \rangle$ (第五讲命题 1.11 (iv)). 于是, $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ 是 S 中的一个极大线性无关组且它包含 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$. 否则, 存在 $\mathbf{u}_{k+1} \in S$ 使得 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}$ 线性无关. 对向量 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}$ 重复上述推理过程, 我们要么得出

$$\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}\}$$

是 S 的极大线性无关组, 要么证明存在向量 $\mathbf{u}_{k+2} \in S$ 使得 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+2}$ 线性无关. 由例 ?? 可知, S 中不可能有 $n + 1$ 个线性无关的向量. 故上述推理过程重复有限步后, 我们就会得到一个 S 中的极大线性无关组且它包含 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$.

(ii) 设 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\ell$ 是 S 的极大线性无关组. 因为

$$\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m \in \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\ell \rangle,$$

所以 $m \leq \ell$ (线性组合引理). 同理可知, $\ell \leq m$.

反之, 设 $\ell = m$. 由 (i) 可知, S 有一个极大线性无关组

$$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_{m+1}, \dots, \mathbf{v}_{m+s}$$

由极大线性无关组的定义可知 $\mathbf{v}_i \in \langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m \rangle$, $i = 1, 2, \dots, m+s$. 假设 $s > 0$. 根据线性组合引理, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_{m+1}, \dots, \mathbf{v}_{m+s}$ 线性相关, 矛盾. 故 $s = 0$. 即 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ 是 S 的极大线性无关组. $\square$

注解 3.4 由上述命题可知, 任何含有非零向量的集合必有极大线性无关组.

例 3.5 向量 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组极大线性无关组.

例 3.6 证明 $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个极大线性无关组.

证明. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ 使得

$$\alpha_1(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + \alpha_2(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) + \alpha_3\mathbf{e}_3 + \dots + \alpha_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}.$$

则

$$(\alpha_1 + \alpha_2)\mathbf{e}_1 + (\alpha_1 - \alpha_2)\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3 + \dots + \alpha_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}.$$

因为 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ 线性无关, 所以 $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0, \dots, \alpha_n = 0$. 故 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. 于是,

$$\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_n$$

线性无关. 由命题 3.3 (ii) 可知, $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个极大线性无关组.

3.2 子空间的基底

定义 3.7 设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是子空间且 $U \neq \{\mathbf{0}\}$. 向量集

$$\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d\} \subset U$$

称为 U 的一组基, 如果对任意 $\mathbf{u} \in U$, 存在唯一的

$$\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{R},$$

使得 $\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_d \mathbf{u}_d$.

如注解 3.2 所述, 当 $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d\}$ 是子空间 U 的一组基时, 我们也简称 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$ 是 U 的一组基.

命题 3.8 设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是子空间且 $U \neq \{\mathbf{0}\}$. 向量集

$$\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d\}$$

是 U 的一组基当且仅当该向量集是 U 的极大线性无关组.

证明. 设 $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d\}$ 是 U 的基. 再设 $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{R}$ 使得

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_d \mathbf{u}_d = \mathbf{0}.$$

由基底定义可知, $\alpha_1 = \dots = \alpha_d = 0$. 故 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$ 线性无关. 再由基底定义中条件 (ii) 可知, $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$ 是 U 的极大线性无关组.

反之, 设 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$ 是 U 的一个极大线性无关组. 根据第五讲命题 1.11 (iv), $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$ 是 U 的一组基. $\square$

由例 3.5 可知, $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一组基. 称之为 $\mathbb{R}^n$ 的标准基.

推论 3.9 设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 包含非零向量. 则 S 中的极大线性无关组是 $\langle S \rangle$ 的一组基.

证明. 设 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$ 是 S 的一个极大线性无关组. 则

$$S \subset \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d \rangle.$$

由第五讲命题 1.25, $\langle S \rangle \subset \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d \rangle$. 而另一个方向的包含关系是显然的. 于是, $\langle S \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d \rangle$. 即 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$ 是 $\langle S \rangle$ 的极大线性无关组. 根据上述命题, $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$ 是 $\langle S \rangle$ 的一组基. $\square$

例 3.10 设

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

求 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$ 的一组基.

解. 根据上述推论, 我们只要求出 $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ 中的一个极大线性无关组即可.

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是, 以矩阵 $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 为系数矩阵的齐次线性方程组只有平凡解. 故 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 线性无关. 由第二章第一讲例 1.9, $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ 线性相关. 故 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 是 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$ 的一组基. 类似地可知, $\mathbf{x}, \mathbf{z}$ 和 $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ 都是 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$ 的基

定理 3.11 (基扩充定理) 设 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ 是子空间 U 中线性无关的向量. 则 U 有一组基包含 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$.

证明. 根据命题 3.3 (i), U 中有极大线性无关组包含 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$. 再根据上述命题, 该极大线性无关组是 U 的一组基. $\square$

3.3 维数

定义 3.12 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的子空间. 如果 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$ 是 U 的一组基, 则 U 的维数 (*dimension*) 定义为 d . 当 $U = \{\mathbf{0}\}$ 时, 其维数定义为 0. 该维数记为 $\dim(U)$.

根据命题 3.3 (ii) 和命题 3.8, 子空间维数是良定义的. 因为坐标空间 $\mathbb{R}^n$ 有标准基 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, 所以 $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

命题 3.13 设 U, W 是 $\mathbb{R}^n$ 的两个子空间且 $U \subset W$. 则 $\dim(U) \leq \dim(W)$. 进而, $U=W$ 当且仅当 $\dim(U)=\dim(W)$.

证明. 设 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$ 是 U 的一组基. 由假设 $U \subset W$ 和基扩充定理 3.11, W 有一组基包含 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$. 故 $\dim(U) \leq \dim(W)$.

再设 $d = \dim(W)$. 则 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$ 也是 W 的基 (命题 3.3 (ii)). 故 $W \subset \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d \rangle = U$. $\square$

命题 3.14 设 U, W 是 $\mathbb{R}^n$ 的两个子空间. 则

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W).$$

证明. 令 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 是 $U \cap W$ 的一组基. 由基扩充定理, U 有基底 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_{k+\ell}$; W 有基底 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_{k+1}, \dots, \mathbf{w}_{k+m}$.

断言. $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_{k+\ell}, \mathbf{w}_{k+1}, \dots, \mathbf{w}_{k+m}\}$ 是 $U + W$ 的一组基.

断言的证明. 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_\ell, \gamma_1, \dots, \gamma_m \in \mathbb{R}$ 使得

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k + \beta_1 \mathbf{u}_{k+1} + \dots + \beta_\ell \mathbf{u}_{k+\ell} + \underbrace{\gamma_1 \mathbf{w}_{k+1} + \dots + \gamma_m \mathbf{w}_{k+m}}_{\mathbf{w}} = \mathbf{0}.$$

则 $\mathbf{w} \in U \cap W$. 于是, 存在 $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ 使得

$$\mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k.$$

即

$$(-\gamma_1) \mathbf{w}_1 + \dots + (-\gamma_m) \mathbf{w}_m + \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

因为 $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 线性无关, 所以

$$\gamma_1 = \dots = \gamma_m = 0.$$

故

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k + \beta_1 \mathbf{u}_{k+1} + \dots + \beta_\ell \mathbf{u}_{k+\ell} = \mathbf{0}.$$

因为 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_\ell, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 线性无关, 所以 $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = \beta_1 = \dots = \beta_\ell = 0$. 于是, S 中的向量线性无关.

再设 $\mathbf{x} \in U + W$. 则存在 $\mathbf{y} \in U$ 和 $\mathbf{z} \in W$ 使得 $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$. 因为 $\mathbf{y}$ 是 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_{k+\ell}$ 的线性组合, $\mathbf{z}$ 是 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_{k+1}, \dots, \mathbf{w}_{k+m}$ 的线性组合. 故 $\mathbf{x}$ 是 S 中的向量的线性组合. 即 S 是 $U + W$ 的一个极大线性无关组. 根据命题 3.8, 断言成立.

由断言可知 $\dim(U + W) = k + \ell + m$. 因为

$$\dim(U \cap W) = k, \dim(U) = k + \ell, \dim(W) = k + m,$$

所以

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W). \quad \square$$

注解 3.15 在上述命题证明中, 当 $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$, 则集合 $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ 是空集, 即 $k = 0$.

例 3.16 设 $U, W \subset \mathbb{R}^n$ 是子空间, $\dim(U)=d > 0$, $\dim(W)=n-1$.
证明: $\dim(U \cap W) \geq d - 1$.

证明. 由维数公式可知:

$$\begin{aligned}\dim(U \cap W) &= \dim(U) + \dim(W) - \dim(U + W) \\ &\geq d + n - 1 - n \quad (\because \dim(U + W) \leq n) \\ &= d - 1.\end{aligned}$$

例 3.17 设 $U, W \subset \mathbb{R}^n$ 是子空间. 证明 $V + W$ 是直和当且仅当 $\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W)$.

证明. 由维数公式可知

$$\begin{aligned}\dim(V + W) &= \dim(V) + \dim(W) \\ &\iff \dim(U \cap W) = 0 \\ &\iff U \cap W = \{\mathbf{0}\}. \quad \square\end{aligned}$$