

第二章 矩阵

例 5.8 设

$$\begin{aligned}\phi: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+l} \\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

验证 ϕ 是线性映射.

证明. 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. 则

$$\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{y} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \phi(\mathbf{x}) + \phi(\mathbf{y}).$$

故 ϕ 保持加法. 类似可验证 ϕ 保持数乘. $\square$

例 5.9 设

$$\phi: \mathbb{R}^{n+\ell} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+\ell} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

验证 ϕ 是线性映射.

证明. 设 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 和 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^\ell$. 再设 $\alpha \in \mathbb{R}$. 则

$$\phi\left(\alpha \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}\right) = \phi\left(\begin{pmatrix} \alpha\mathbf{x} \\ \alpha\mathbf{y} \end{pmatrix}\right) = \alpha\mathbf{x} = \alpha\phi\left(\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}\right).$$

故 ϕ 保持数乘. 类似可证 ϕ 保持加法. $\square$

命题 5.10 设 $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 线性. 如果 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ 线性相关, 则 $\phi(\mathbf{v}_1), \dots, \phi(\mathbf{v}_k)$ 也线性相关.

证明. 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, 不全为零, 使得 $\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}_n$. 根据上一章命题 5.3,

$$\mathbf{0}_m = \phi(\mathbf{0}_n) = \phi\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \phi(\mathbf{v}_i).$$

因为 $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, 不全为零, 所以 $\phi(\mathbf{v}_1), \dots, \phi(\mathbf{v}_k)$ 线性相关. $\square$

命题 5.11 设 $\phi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射.

(i) 如果 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, 则 $\phi(U)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间. 特别地, $\text{im}(\phi)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间, 且 $\dim(U) \geq \dim(\phi(U))$.

(ii) 如果 W 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间, 则 $\phi^{-1}(W)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 特别地, $\phi^{-1}(\{\mathbf{0}_m\})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间.

证明. (i) 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \phi(U)$. 则存在 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ 使得 $\phi(\mathbf{u}) = \mathbf{x}$ 和 $\phi(\mathbf{v}) = \mathbf{y}$. 对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} &= \alpha\phi(\mathbf{u}) + \beta\phi(\mathbf{v}) \\ &= \phi(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) \\ &\in \phi(U) \quad (\text{命题 1.17 (ii)}).\end{aligned}$$

根据第二章第一讲命题 1.16, $\phi(U)$ 是子空间.

设 $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_d$ 是 $\phi(U)$ 的一组基, 且 $\mathbf{w}_i = \phi(\mathbf{u}_i)$, 其中 $\mathbf{u}_i \in U, i = 1, \dots, d$. 因为 $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_d$ 线性无关, 所以 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$ 线性无关 (上一讲命题 5.7). 利用基扩充可知 U 有一组基底包含 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$. 故 $\dim(U) \geq d$.

(ii) 对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \phi^{-1}(W), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 我们计算

$$\phi(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\phi(\mathbf{x}) + \beta\phi(\mathbf{y}).$$

因为 $\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y}) \in W$ 且 W 是子空间, 所以 $\alpha\phi(\mathbf{x}) + \beta\phi(\mathbf{y}) \in W$. 由此得出 $\phi(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) \in W$. 从而, $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in \phi^{-1}(W)$. $\square$

命题 5.12 设 $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$ 和 $\phi: \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^m$ 都是线性映射
 则 $\phi \circ \psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 也是线性映射.

证明.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{R}^s \\ & \searrow \phi \circ \psi & \downarrow \phi \\ & & \mathbb{R}^m. \end{array}$$

设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. 我们计算

$$\phi \circ \psi(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \phi(\alpha \psi(\mathbf{x}) + \beta \psi(\mathbf{y})) = \alpha \phi \circ \psi(\mathbf{x}) + \beta \phi \circ \psi(\mathbf{y}). \quad \square$$

5.2 核空间和像空间

定义 5.13 设 $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射. 坐标空间 $\mathbb{R}^n$ 中的子空间 $\phi^{-1}(\{\mathbf{0}_m\})$ 称为 ϕ 的核 (kernel), 记为 $\ker(\phi)$. 坐标空间 $\mathbb{R}^m$ 中的子空间 $\text{im}(\phi)$ 称为 ϕ 的像 (image).

由命题 5.11 可知, $\ker(\phi)$ 和 $\text{im}(\phi)$ 分别是 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^m$ 中的子空间.

例 5.14 设 ϕ 和 ψ 由例 5.2 给出. 则对零映射 ϕ , 我们有:

$$\ker(\phi) = \mathbb{R}^n \quad \text{和} \quad \text{im}(\phi) = \{\mathbf{0}_m\}.$$

对恒同映射 ψ , 我们有:

$$\ker(\psi) = \{\mathbf{0}\} \quad \text{和} \quad \text{im}(\psi) = \mathbb{R}^n.$$

设 $\psi_\lambda : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 由例 5.5 给出. 则数乘映射 ψ_λ , 我们有: 当 $\lambda \neq 0$ 时,

$$\ker(\psi_\lambda) = \{\mathbf{0}\} \quad \text{和} \quad \text{im}(\psi_\lambda) = \mathbb{R}^n.$$

当 $\lambda = 0$ 时, ψ_0 是零映射.

设 $\phi : \mathbb{R}^{n+k} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 是例 5.9 中的投射. 则

$$\ker(\phi) = \langle \mathbf{e}_{n+1}, \dots, \mathbf{e}_{n+k} \rangle \quad \text{和} \quad \text{im}(\phi) = \mathbb{R}^n.$$

命题 5.15 设 $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射. 则 ϕ 是单射当且仅当 $\ker(\phi) = \{\mathbf{0}_n\}$.

证明. 设 ϕ 是单射. 根据上一章命题 5.3, $\phi(\mathbf{0}_n) = \mathbf{0}_m$. 因为 ϕ 是单射, 所以 $\ker(\phi) = \{\mathbf{0}_n\}$. 反之, 设 $\ker(\phi) = \{\mathbf{0}_n\}$. 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{y})$. 则

$$\phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{y}) = \mathbf{0}_m.$$

于是, $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \ker(\phi)$. 因为 $\ker(\phi) = \{\mathbf{0}_n\}$, 所以 $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$. 故 $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, 即 ϕ 是单射. $\square$

例 5.16 设 $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性单射. 证明: 如果 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ 线性无关, 则 $\phi(\mathbf{v}_1), \dots, \phi(\mathbf{v}_k)$ 线性无关. 证明. 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ 使得

$$\alpha_1 \phi(\mathbf{v}_1) + \dots + \alpha_k \phi(\mathbf{v}_k) = \mathbf{0}_m.$$

则

$$\phi(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k) = \mathbf{0}_m.$$

因为 ϕ 是单射, 所以 $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}_n$. 因为 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 线性无关, 所以 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$. 故 $\phi(\mathbf{v}_1), \dots, \phi(\mathbf{v}_k)$ 线性无关. $\square$

引理 5.17 设 $\phi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ 线性无关. 则 $\phi(\mathbf{v}_1), \dots, \phi(\mathbf{v}_k)$ 线性无关当且仅当

$$\ker(\phi) \cap \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle = \{\mathbf{0}_n\}.$$

证明. 设 $\ker(\phi) \cap \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle = \{\mathbf{0}_n\}$. 令 $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ 使得

$$\alpha_1 \phi(\mathbf{v}_1) + \cdots + \alpha_k \phi(\mathbf{v}_k) = \mathbf{0}_m.$$

则 $\phi(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k) = \mathbf{0}_m$. 故

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k \in \ker(\phi) \cap \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle = \{\mathbf{0}_n\}.$$

于是, $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0} \implies \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$. 即 $\phi(\mathbf{v}_1), \dots, \phi(\mathbf{v}_k)$ 线性无关.

反之, 设 $\phi(\mathbf{v}_1), \dots, \phi(\mathbf{v}_k)$ 线性无关. 令

$$\mathbf{v} \in \ker(\phi) \cap \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle.$$

则存在 $\beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{R}$ 使得 $\mathbf{v} = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_k \mathbf{v}_k$. 故 $\mathbf{0} = \phi(\mathbf{v}) = \beta_1 \phi(\mathbf{v}_1) + \cdots + \beta_k \phi(\mathbf{v}_k)$. 由此可知,

$$\beta_1 = \cdots = \beta_k = 0.$$

从而得出 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, 即 $\ker(\phi) \cap \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle = \{\mathbf{0}_n\}$. $\square$

定理 5.18 (对偶定理, 线性映射版) 设 $\phi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射. 则

$$\dim(\ker(\phi)) + \dim(\operatorname{im}(\phi)) = n.$$

证明. 设 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d$ 是 $\ker(\phi)$ 的一组基. 由基扩充定理, $\mathbb{R}^n$ 有一组基 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d, \mathbf{v}_{d+1}, \dots, \mathbf{v}_n$.

断言. $\phi(\mathbf{v}_{d+1}), \dots, \phi(\mathbf{v}_n)$ 是 $\operatorname{im}(\phi)$ 的一组基.

断言的证明. 先验证 $\phi(\mathbf{v}_{d+1}), \dots, \phi(\mathbf{v}_n)$ 线性无关. 引理 5.17, 只需验证

$$\ker(\phi) \cap \langle \mathbf{v}_{d+1}, \dots, \mathbf{v}_n \rangle = \{\mathbf{0}_n\}. \quad (1)$$

设 $\mathbf{x} \in \ker(\phi) \cap \langle \mathbf{v}_{d+1}, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$. 则 $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_d, \beta_{d+1}, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ 使得 $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_d \mathbf{v}_d = \beta_{d+1} \mathbf{v}_{d+1} + \dots + \beta_n \mathbf{v}_n$. 因为 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d, \mathbf{v}_{d+1}, \dots, \mathbf{v}_n$ 线性无关, 所以 $\alpha_1 = \dots = \alpha_d = 0$. 故 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. 于是, (1) 成立.

再验证 $\operatorname{im}(\phi) = \langle \phi(\mathbf{v}_1), \dots, \phi(\mathbf{v}_n) \rangle$. 因为 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 所以 $\operatorname{im}(\phi) = \langle \phi(\mathbf{v}_1), \dots, \phi(\mathbf{v}_n) \rangle$ (上一讲命题 5.3 (iii)). 因为 $\phi(\mathbf{v}_1) = \dots = \phi(\mathbf{v}_d) = \mathbf{0}_m$, 所以 $\operatorname{im}(\phi) = \langle \phi(\mathbf{v}_{d+1}), \dots, \phi(\mathbf{v}_n) \rangle$. 断言成立.

由断言可知 $\dim(\operatorname{im}(\phi)) = n - d$. $\square$

推论 5.19 设 $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射. 如果 ϕ 是双射, 则 $\phi^{-1}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是线性映射且 $m = n$.

证明. 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. 因为 ϕ 是满射, 所以存在 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{u})$ 和 $\mathbf{y} = \phi(\mathbf{v})$. 因为

$$\phi(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha\phi(\mathbf{u}) + \beta\phi(\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y},$$

所以

$$\phi^{-1}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} = \alpha\phi^{-1}(\mathbf{x}) + \beta\phi^{-1}(\mathbf{y}).$$

故 ϕ^{-1} 线性.

因为 ϕ 是双射, 所以 $\ker(\phi) = \{\mathbf{0}_n\}$ (命题 5.15) 和 $\mathbb{R}^m = \text{im}(\phi)$. 由对偶定理可知 $m = n$. $\square$

推论 5.20 设 $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是线性映射. 则下列断言等价

(i) ϕ 是单射,

(ii) ϕ 是满射,

(iii) ϕ 是双射.

证明. (i) $\Rightarrow$ (ii): 因为 ϕ 单, 所以 $\dim(\ker(\phi)) = 0$. 故 $\dim(\text{im}(\phi)) = n$ (对偶定理). 故 $\text{im}(\phi) = \mathbb{R}^n$, 即 ϕ 是满射.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): 因为 ϕ 满, 所以 $\dim(\text{im}(\phi)) = n$. 故 $\dim(\ker(\phi)) = 0$ (对偶定理). 故 ϕ 单 (命题 5.15), 即 ϕ 是双射.

(iii) $\Rightarrow$ (i): 显然. $\square$

5.3 线性映射基本定理

定理 5.21 (线性映射基本定理) 设 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的任意给定的向量. 则存在唯一的线性映射 ϕ 使得 $\phi(\mathbf{v}_j) = \mathbf{w}_j, j = 1, 2, \dots, n$.

证明. 定义

$$\begin{aligned} \phi: \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j &\mapsto \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{w}_j, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

因为 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 是基底, 所以对任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 存在唯一的 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ 使得 $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j$. 于是, ϕ 是良定义的. 显然 $\phi(\mathbf{v}_j) = \mathbf{w}_j, j = 1, 2, \dots, n$.

下面验证 ϕ 是线性的. 设

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j, \quad \mathbf{y} = \sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{v}_j, \quad \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}.$$

则

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \phi \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j + \sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{v}_j \right) \\ &= \phi \left(\sum_{j=1}^n (\alpha_j + \beta_j) \mathbf{v}_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n (\alpha_j + \beta_j) \mathbf{w}_j \quad (\phi \text{ 的定义}) \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{w}_j + \sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{w}_j \\ &= \phi(\mathbf{x}) + \phi(\mathbf{y}) \quad (\phi \text{ 的定义}).\end{aligned}$$

设 $\lambda \in \mathbb{R}$. 则

$$\begin{aligned}\phi(\lambda \mathbf{x}) &= \phi \left(\sum_{j=1}^n (\lambda \alpha_j) \mathbf{v}_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n (\lambda \alpha_j) \mathbf{w}_j \quad (\phi \text{ 的定义}) \\ &= \lambda \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{w}_j \\ &= \lambda \phi(\mathbf{x}) \quad (\phi \text{ 的定义}).\end{aligned}$$

最后, 我们来验证唯一性. 设 $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性

映射满足 $\psi(\mathbf{v}_j) = \mathbf{w}_j, j = 1, 2, \dots, n$. 则

$$\psi(\mathbf{x}) = \psi\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j\right) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \psi(\mathbf{v}_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{w}_j = \phi(\mathbf{x}).$$

故 $\psi = \phi$. $\square$

设 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n; \boldsymbol{\epsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\epsilon}_m$ 分别是 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^m$ 的标准基.

命题 5.22 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 线性映射 $\phi_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是满足

$$\phi_A(\mathbf{e}_j) = \vec{A}^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

则对任意 $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$,

$$\phi_A(\mathbf{x}) = x_1 \vec{A}^{(1)} + \dots + x_n \vec{A}^{(n)}.$$

进而, $V_c(A) = \text{im}(\phi_A)$ 和 $V_A = \ker(\phi_A)$, 其中 V_A 是以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间.

证明. 直接计算得

$$\phi_A(\mathbf{x}) = \phi_A(\mathbf{e}_1) = \sum_{j=1}^n x_j \phi_A(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^n x_j \vec{A}^{(j)}.$$

设 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. 则

$$\mathbf{y} \in \text{im}(\phi_A) \Leftrightarrow \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} = \phi_A(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \mathbf{y} = \sum_{j=1}^n x_j \vec{A}^{(j)} \Leftrightarrow \mathbf{y} \in V_c(A).$$

故 $\text{im}(\phi_A) = V_c(A)$. 类似地,

$$\mathbf{x} \in \ker(\phi_A) \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n x_j \vec{A}^{(j)} = \mathbf{0}_m \Leftrightarrow \mathbf{x} \in V_A.$$

故 $\ker(\phi_A) = V_A$. $\square$

我们称上述命题中的 ϕ_A 是由矩阵 A 在标准基下诱导的线性映射. 根据线性映射基本定理, ϕ_A 是唯一的.

例 5.23 利用定理 5.18 证明对偶定理的方程版.

证明. 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, H 是以 A 为系数矩阵的 n 元齐次线性方程组, ϕ_A 是由 A 诱导的从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的线性映射. 因为 $\operatorname{im}(\phi_A) = V_c(A)$ 和 $\ker(\phi_A) = \operatorname{sol}(H)$. 故定理 5.18 蕴含对偶定理的方程版.

5.4 线性映射在标准基下的矩阵表示

设 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n; \boldsymbol{\epsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\epsilon}_m$ 分别是 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^m$ 的标准基. 考虑线性映射 $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. 对 $j = 1, 2, \dots, n$, 设

$$\phi(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^m a_{i,j} \boldsymbol{\epsilon}_i.$$

根据线性映射基本定理, ϕ 由矩阵

$$A = (\phi(\mathbf{e}_1), \dots, \phi(\mathbf{e}_n)) = (a_{i,j})_{m \times n}$$

唯一确定. 事实上, $\phi = \phi_A$. 我们称 A 是线性映射 ϕ 在标准基下的矩阵的表示, 简称 ϕ 的矩阵. 记为 M_ϕ .

例 5.24 设 $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是零映射, 即 $\phi(\mathbf{e}_j) = \mathbf{0}_m$, $j = 1, 2, \dots, n$. 则 $M_\phi = O_{m \times n}$.

例 5.25 设 $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 是数乘映射, 即 $\phi(\mathbf{e}_j) = \lambda \mathbf{e}_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, 其中 $\lambda \in \mathbb{R}$. 则

$$M_\phi = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}.$$

称之为 n 阶数乘(方)阵, 有时记为 $\text{diag}_n(\lambda)$. 记 $\text{diag}_n(1)$ 为 E_n . 称为 n 阶单位方阵. 它对应的线性映射是恒同映射.

命题 5.26 设 $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射, 它在标准基下的矩阵是 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

(i) $\dim(\text{im}(\phi)) = \text{rank}(A)$. 特别地, ϕ 是满射当且仅当 A 行满秩.

(ii) $\dim(\ker(\phi)) = n - \text{rank}(A)$. 特别地, ϕ 是单射当且仅当 A 列满秩.

(iii) ϕ 是双射当且仅当 $m = n$ 且 A 满秩.

证明. 注意到, $\dim(V_c(A)) = \text{rank}(A)$ 和 ϕ 满当且仅当 $V_c(A) = \mathbb{R}^m$, 即 $V_c(A) = \mathbb{R}^m$ 当且仅当 $\dim V_c(A) = m$. 故 (i) 成立. 根据对偶定理, $\dim(\ker(\phi)) = n - \text{rank}(A)$. 特别地, ϕ 是单射当且仅当 A 列满秩. 故 (ii) 成立. (iii) 是 (i) 和 (ii) 的直接推论. $\square$

例 5.27 设 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_4$ 是 $\mathbb{R}^4$ 的标准基, $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基. 线性映射 $\phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 由

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{e}_1) = 2\epsilon_1 - \epsilon_3 \\ \phi(\mathbf{e}_2) = \epsilon_2 - \epsilon_3 \\ \phi(\mathbf{e}_3) = 4\epsilon_1 + \epsilon_2 - 3\epsilon_3 \\ \phi(\mathbf{e}_4) = 2\epsilon_1 + \epsilon_2 - 2\epsilon_3 \end{cases}$$

确定. 计算

(i) 计算 ϕ 在 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4; \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 下的矩阵;

(ii) 计算 $\ker(\phi)$ 和 $\text{im}(\phi)$ 的维数;

(iii) 分别计算 $\ker(\phi)$ 和 $\text{im}(\phi)$ 的一组基底.

解. (i) 由定义可知:

$$A_\phi = (\phi(\mathbf{e}_1), \phi(\mathbf{e}_2), \phi(\mathbf{e}_3), \phi(\mathbf{e}_4)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

(ii) 利用初等行变换得

$$A_\phi \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因为 $\text{rank}(A_\phi) = 2$, 所以 $\dim(\text{im}(\phi)) = 2$. 由对偶定理可知, $\dim(\ker(\phi)) = 4 - 2 = 2$.

(iii) $\ker(\phi)$ 对应的齐次线性方程组是

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = -3x_3 - 2x_4 \\ x_2 = -x_3 - x_4. \end{cases}$$

于是, $\ker(\phi)$ 的一组基是

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

像空间 $\text{im}(\phi)$ 的基是 A_ϕ 中的极大线性无关组. 因为

$$\dim(\text{im}(\phi)) = 2,$$

所以取 A_ϕ 中任意两个线性无关的列向量即可. 例如 $\text{im}(\phi)$ 的一组基是 $\vec{A}_\phi^{(1)}, \vec{A}_\phi^{(2)}$.

6 矩阵的运算

6.1 通过线性映射的运算定义矩阵的运算

定义 6.1 设 ϕ 和 ψ 是从集合 S 到 $\mathbb{R}^m$ 的映射, $\lambda \in \mathbb{R}$. 令:

$$\begin{array}{ccc} \phi + \psi : S & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ s & \mapsto & \phi(s) + \psi(s) \end{array} \quad \text{和} \quad \begin{array}{ccc} \lambda\phi : S & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ s & \mapsto & \lambda\phi(s). \end{array}$$

分别称为映射的加法与映射的数乘.

根据 $\mathbb{R}^m$ 中线性运算的性质, 我们可直接验证映射的加法和数乘满足交换律和结合律且这两个运算满足分配律.

命题 6.2 设 ϕ 和 ψ 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的线性映射, $\lambda \in \mathbb{R}$. 则 $\phi + \psi$ 和 $\lambda\phi$ 也是线性映射.

证明. 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. 我们计算

$$\begin{aligned}(\phi + \psi)(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \psi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \quad (\text{映射加法的定义}) \\&= \phi(\mathbf{x}) + \phi(\mathbf{y}) + \psi(\mathbf{x}) + \psi(\mathbf{y}) \quad (\text{线性映射的定义}) \\&= (\phi + \psi)(\mathbf{x}) + (\phi + \psi)(\mathbf{y}) \quad (\text{映射加法的定义}).\end{aligned}$$

设 $\alpha \in \mathbb{R}$. 则

$$\begin{aligned}(\phi + \psi)(\alpha\mathbf{x}) &= \phi(\alpha\mathbf{x}) + \psi(\alpha\mathbf{x}) \quad (\text{映射加法的定义}) \\&= \alpha\phi(\mathbf{x}) + \alpha\psi(\mathbf{x}) \quad (\text{线性映射的定义}) \\&= \alpha(\phi + \psi)(\mathbf{x}) \quad (\text{映射加法的定义}).\end{aligned}$$

于是, $\phi + \psi$ 是线性映射. 类似地,

$$\begin{aligned}(\lambda\phi)(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \lambda\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \quad (\text{映射数乘的定义}) \\&= \lambda(\phi(\mathbf{x}) + \phi(\mathbf{y})) \quad (\text{线性映射的定义}) \\&= (\lambda\phi)(\mathbf{x}) + (\lambda\phi)(\mathbf{y}) \quad (\text{映射数乘的定义}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\lambda\phi)(\alpha\mathbf{x}) &= \lambda\phi(\alpha\mathbf{x}) \quad (\text{映射数乘的定义}) \\&= \lambda\alpha\phi(\mathbf{x}) \quad (\text{线性映射的定义}) \\&= \alpha(\lambda\phi)(\mathbf{x}) \quad (\text{映射数乘的定义}). \quad \square\end{aligned}$$

设 $\phi, \psi \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, 它们在标准基下的表示分别是 $A = (a_{i,j})_{m \times n}$ 和 $B = (b_{i,j})_{m \times n}$. 则

$$(\phi + \psi)(\mathbf{e}_j) = \phi(\mathbf{e}_j) + \psi(\mathbf{e}_j) = \vec{A}^{(j)} + \vec{B}^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

由此我们定义两个矩阵 A 和 B 的和

$$A + B = (\vec{A}^{(1)} + \vec{B}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(n)} + \vec{B}^{(n)}).$$

等价地, $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{m \times n}$.

设 $\lambda \in \mathbb{R}$. 则

$$(\lambda\phi)(\mathbf{e}_j) = \lambda\phi(\mathbf{e}_j) = \lambda\vec{A}^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

由此我们定义矩阵的数乘 $\lambda A = (\lambda\vec{A}^{(1)}, \dots, \lambda\vec{A}^{(n)})$. 等价地, $\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{m \times n}$.

由矩阵加法和数乘的定义可知, 对任意 $\lambda \in \mathbb{R}, A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 我们有 $\phi_A + \phi_B = \phi_{A+B}$ 和 $(\lambda\phi)_A = \phi_{\lambda A}$.

可直接验证矩阵的加法满足交换律和结合律, 且对于任意 $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $A + O_{m \times n} = A$ 和 $A + (-A) = O_{m \times n}$. 进而, 对于任意 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$. 分配律:

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B \quad \text{和} \quad (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A.$$

例 6.3 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 计算 $3A - 2B$.

$$\text{解. } 3A - 2B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

6.2 乘法

设 $\psi \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^s), \phi \in \text{Hom}(\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^m)$. 即

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{R}^s \\ & \searrow \phi \circ \psi & \downarrow \phi \\ & & \mathbb{R}^m. \end{array}$$

我们来推导上述 $\psi \circ \phi$ 的矩阵. 为此, 再设 $\delta_1, \dots, \delta_s$ 是 $\mathbb{R}^s$ 的标准基. 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times s}$ 是 ϕ 在 $\delta_1, \dots, \delta_s; \epsilon_1, \dots, \epsilon_m$ 下的矩阵; $B \in \mathbb{R}^{s \times n}$ 是 ψ 在 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n; \delta_1, \dots, \delta_s$ 下的矩阵. 令 $A = (a_{i,k})_{m \times s}$ 和 $B = (b_{k,j})_{s \times n}$.

设 $C = (c_{i,j})_{m \times n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 是 $\phi \circ \psi$ 在 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n; \epsilon_1, \dots, \epsilon_m$

下的矩阵. 我们计算

$$\begin{aligned}
C &= (\phi \circ \psi(\mathbf{e}_1), \dots, \phi \circ \psi(\mathbf{e}_n)) \quad (\text{矩阵表示的定义}) \\
&= \left(\phi(\vec{B}^{(1)}), \dots, \phi(\vec{B}^{(n)}) \right) \quad (\text{矩阵表示的定义}) \\
&= \left(\sum_{k=1}^s b_{k,1} \vec{A}^{(k)}, \dots, \sum_{k=1}^s b_{k,n} \vec{A}^{(k)} \right) \quad (\text{向量形式}) \\
&= \left(\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^s b_{k,1} a_{1,k} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^s b_{k,1} a_{m,k} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^s b_{k,n} a_{1,k} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^s b_{k,n} a_{m,k} \end{pmatrix} \right) \quad (\text{坐标形式}) \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^s b_{k,1} a_{1,k} & \cdots & \sum_{k=1}^s b_{k,n} a_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^s b_{k,1} a_{m,k} & \cdots & \sum_{k=1}^s b_{k,n} a_{m,k} \end{pmatrix} \\
&= \left(\sum_{k=1}^s a_{i,k} b_{k,j} \right)_{m \times n}.
\end{aligned}$$

故

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^s a_{i,k} b_{k,j}, \quad i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

定义 6.4 设 $A = (a_{i,k})_{m \times s} \in \mathbb{R}^{m \times s}$, $B = (b_{k,j})_{s \times n} \in \mathbb{R}^{s \times n}$. 则 A 和 B 的乘积 $C = (c_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 由 (2) 给出, 其中 $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$. 我们把 C 记为 AB .

例 6.5 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

计算 AB .

解.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 4 & 15 & -1 \end{pmatrix}.$$

注意到 BA 没有定义.

例 6.6 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

计算 AB 和 BA .

解.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

而

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

注意到 $AB \neq BA$.