第二章　矩阵

6　矩阵的运算

6.1　通过线性映射的运算定义矩阵的运算

定义 6.1 设 ϕ 和 ψ 是从集合 S 到 $\mathbb{R}^m$ 的映射, $\lambda \in \mathbb{R}$. 令:

$$\begin{array}{rccc} \phi+\psi: & S & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & s & \mapsto & \phi(s)+\psi(s) \end{array} \quad \text{和} \quad \begin{array}{rccc} \lambda\phi: & S & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & s & \mapsto & \lambda\phi(s). \end{array}$$

分别称为映射的加法与映射的数乘.

根据 $\mathbb{R}^m$ 中线性运算的性质, 我们可直接验证映射的加法和数乘满足交换律和结合律且这两个运算满足分配律.

命题 6.2 设 ϕ 和 ψ 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的线性映射, $\lambda \in \mathbb{R}$. 则 $\phi+\psi$ 和 $\lambda\phi$ 也是线性映射.

证明. 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. 我们计算

$$\begin{aligned} (\phi+\psi)(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= \phi(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\psi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \quad \text{(映射加法的定义)} \\ &= \phi(\mathbf{x})+\phi(\mathbf{y})+\psi(\mathbf{x})+\psi(\mathbf{y}) \quad \text{(线性映射的定义)} \\ &= (\phi+\psi)(\mathbf{x})+(\phi+\psi)(\mathbf{y}) \quad \text{(映射加法的定义).} \end{aligned}$$

设 $\alpha \in \mathbb{R}$. 则

$$\begin{aligned}(\phi+\psi)(\alpha\mathbf{x}) &= \phi(\alpha\mathbf{x})+\psi(\alpha\mathbf{x}) \quad \text{(映射加法的定义)}\\ &= \alpha\phi(\mathbf{x})+\alpha\psi(\mathbf{x}) \quad \text{(线性映射的定义)}\\ &= \alpha(\phi+\psi)(\mathbf{x}) \quad \text{(映射加法的定义).}\end{aligned}$$

于是, $\phi+\psi$ 是线性映射. 类似地,

$$\begin{aligned}(\lambda\phi)(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= \lambda\phi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \quad \text{(映射数乘的定义)}\\ &= \lambda(\phi(\mathbf{x})+\phi(\mathbf{y})) \quad \text{(线性映射的定义)}\\ &= (\lambda\phi)(\mathbf{x})+(\lambda\phi)(\mathbf{y}) \quad \text{(映射数乘的定义).}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\lambda\phi)(\alpha\mathbf{x}) &= \lambda\phi(\alpha\mathbf{x}) \quad \text{(映射数乘的定义)}\\ &= \lambda\alpha\phi(\mathbf{x}) \quad \text{(线性映射的定义)}\\ &= \alpha(\lambda\phi)(\mathbf{x}) \quad \text{(映射数乘的定义).} \quad \square\end{aligned}$$

设 $\phi,\psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, 它们在标准基下的表示分别是 $A=(a_{i,j})_{m\times n}$ 和 $B=(b_{i,j})_{m\times n}$. 则

$$(\phi+\psi)(\mathbf{e}_j)=\phi(\mathbf{e}_j)+\psi(\mathbf{e}_j)=\vec{A}^{(j)}+\vec{B}^{(j)}, \quad j=1,2,\ldots,n.$$

由此我们定义两个矩阵 A 和 B 的和

$$A+B=(\vec{A}^{(1)}+\vec{B}^{(1)},\ldots,\vec{A}^{(n)}+\vec{B}^{(n)}).$$

等价地, $A+B=(a_{i,j}+b_{i,j})_{m\times n}$.

设 $\lambda \in \mathbb{R}$. 则

$$(\lambda\phi)(\mathbf{e}_j) = \lambda\phi(\mathbf{e}_j) = \lambda\vec{A}^{(j)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

由此我们定义矩阵的数乘 $\lambda A = (\lambda\vec{A}^{(1)}, \ldots, \lambda\vec{A}^{(n)})$. 等价地, $\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{m\times n}$.

由矩阵加法和数乘的定义可知, 对任意 $\lambda \in \mathbb{R}, A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 我们有 $\phi_A + \phi_B = \phi_{A+B}$ 和 $(\lambda\phi)_A = \phi_{\lambda A}$.

可直接验证矩阵的加法满足交换律和结合律, 且对于任意 $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A + O_{m\times n} = A$ 和 $A + (-A) = O_{m\times n}$. 进而, 对于任意 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$. 分配律:

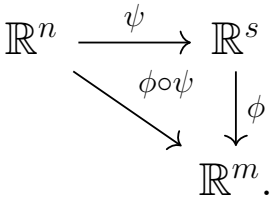
$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B \quad \text{和} \quad (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A.$$

例 6.3 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 计算 $3A - 2B$.

解. $3A-2B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

6.2 乘法

设 $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$ 和 $\phi : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^m$ 都线性. 则 $\phi \circ \psi$ 也线性.



我们来推导上述 $\phi\circ\psi$ 的矩阵. 为此, 再设 $\boldsymbol{\delta}_1,\dots,\boldsymbol{\delta}_s$ 是 $\mathbb{R}^s$ 的标准基. 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times s}$ 是 ϕ 在 $\boldsymbol{\delta}_1,\dots,\boldsymbol{\delta}_s$; $\boldsymbol{\epsilon}_1,\dots,\boldsymbol{\epsilon}_m$ 下的矩阵; $B\in\mathbb{R}^{s\times n}$ 是 ψ 在 $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$; $\boldsymbol{\delta}_1,\dots,\boldsymbol{\delta}_s$ 下的矩阵. 令 $A=(a_{i,k})_{m\times s}$ 和 $B=(b_{k,j})_{s\times n}$.

设 $C=(c_{i,j})_{m\times n}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 是 $\phi\circ\psi$ 在 $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$; $\boldsymbol{\epsilon}_1,\dots,\boldsymbol{\epsilon}_m$ 下的矩阵. 我们计算

$$
\begin{aligned}
C&=(\phi\circ\psi(\mathbf{e}_1),\dots,\phi\circ\psi(\mathbf{e}_n)) \quad \text{(矩阵表示的定义)}\\
&=\left(\phi(\vec{B}^{(1)}),\dots,\phi(\vec{B}^{(n)})\right) \quad \text{(矩阵表示的定义)}\\
&=\left(\sum_{k=1}^{s}b_{k,1}\vec{A}^{(k)},\dots,\sum_{k=1}^{s}b_{k,n}\vec{A}^{(k)}\right) \quad \text{(向量形式)}\\
&=\left(\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{s}b_{k,1}a_{1,k}\\ \vdots\\ \sum_{k=1}^{s}b_{k,1}a_{m,k}\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{s}b_{k,n}a_{1,k}\\ \vdots\\ \sum_{k=1}^{s}b_{k,n}a_{m,k}\end{pmatrix}\right) \quad \text{(坐标形式)}\\
&=\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{s}b_{k,1}a_{1,k} & \cdots & \sum_{k=1}^{s}b_{k,n}a_{1,k}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \sum_{k=1}^{s}b_{k,1}a_{m,k} & \cdots & \sum_{k=1}^{s}b_{k,n}a_{m,k}\end{pmatrix}\\
&=\left(\sum_{k=1}^{s}a_{i,k}b_{k,j}\right)_{m\times n}.
\end{aligned}
$$

故

$$
c_{i,j}=\sum_{k=1}^{s}a_{i,k}b_{k,j},\quad i=1,2,\dots,m,j=1,2,\dots,n. \qquad (1)
$$

定义 6.4 设 $A = (a_{i,k})_{m\times s} \in \mathbb{R}^{m\times s}$, $B = (b_{k,j})_{s\times n} \in \mathbb{R}^{s\times n}$. 则 A 和 B 的乘积 $C = (c_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 由 (1) 给出, 其中 $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. 我们把 C 记为 AB.

例 6.5 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

计算 AB.

解.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 4 & 15 & -1 \end{pmatrix}.$$

注意到 BA 没有定义.

例 6.6 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

计算 AB 和 BA.

解.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

而

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

注意到 $AB \neq BA$.

注解 6.7 设 $A = (a_{i,k})_{m\times s} \in \mathbb{R}^{m\times s}$, $B = (b_{k,j})_{s\times n} \in \mathbb{R}^{s\times n}$. 乘积 AB 有不同的等价表述方式如下:

(i) (映射版) 设 $\phi_B : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^s$ 和 $\phi_A : \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 分别是 A 和 B 对应的线性映射. 由上述计算可知 AB 是线性映射 $\phi_A \circ \phi_B$ 对应的矩阵. 即

$$\phi_A \circ \phi_B = \phi_{AB}.$$

(ii) (列向量版) 设

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_s \end{pmatrix} \Longrightarrow A\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{s} v_k \vec{A}^{(k)} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{s} a_{1,k}v_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{s} a_{m,k}v_k \end{pmatrix}.$$

故

$$AB = \left(A\vec{B}^{(1)}, \ldots, A\vec{B}^{(n)}\right).$$

验证如下: 等式右侧第 i 行第 j 列处的元素是 $A\vec{B}^{(j)}$ 中的第 i 个元素. 即 $\sum_{k=1}^{s} a_{i,k}b_{k,j}$.

(iii) *(行向量版)* 设

$$\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_s) \Longrightarrow \mathbf{w}B = \sum_{k=1}^{s} w_k \vec{B}_k = \left(\sum_{k=1}^{s} w_k b_{k,1}, \ldots, \sum_{k=1}^{s} w_k b_{k,n} \right).$$

故

$$AB = \begin{pmatrix} \vec{A}_1 B \\ \vdots \\ \vec{A}_m B \end{pmatrix}.$$

验证如下: 等式右侧第 i 行第 j 列处的元素是 $\vec{A}_i \vec{B}$ 中的第 j 个元素. 即 $\sum_{k=1}^{s} a_{i,k} b_{k,j}$.

(iv) *(行-列向量版)* 设:

$$\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_k), \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_s \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{uv} = u_1 v_1 + \cdots + u_s v_s.$$

故

$$AB = \begin{pmatrix} \vec{A}_1 \vec{B}^{(1)} & \cdots & \vec{A}_1 \vec{B}^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_m \vec{B}^{(1)} & \cdots & \vec{A}_m \vec{B}^{(n)} \end{pmatrix} = \left(\vec{A}_i \vec{B}^{(j)} \right)_{m \times n}.$$

验证如下: 等式右侧第 i 行第 j 列处的元素是

$$\vec{A}_i \vec{B}^{(j)} = (a_{i,1}, \ldots, a_{i,s}) \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ \vdots \\ b_{s,j} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{s} a_{i,k} b_{k,j}.$$

例 6.8 设 $A=(a_{i,j})\in\mathbb{R}^{m\times n}$. 证明:

$$\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)A=\begin{pmatrix}\lambda_1\vec{A}_1\\ \vdots\\ \lambda_m\vec{A}_m\end{pmatrix}$$

和

$$A\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)=(\lambda_1\vec{A}^{(1)},\ldots,\lambda_n\vec{A}^{(n)}).$$

证明. 矩阵 $B=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)A$ 中第 i 行第 j 列处的元素等于

$$(0,\ldots,0,\lambda_i,0,\ldots 0)\vec{A}^{(j)}=\lambda_i a_{i,j}\overset{j=1,2,\ldots,n}{\Longrightarrow}\vec{B}_i=\lambda_i\vec{A}_i.$$

矩阵 $C=A\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ 中第 i 行第 j 列处的元素等于

$$\vec{A}_i\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ \lambda_j\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=\lambda_j a_{i,j}\overset{i=1,2,\ldots,m}{\Longrightarrow}\vec{C}^{(j)}=\lambda_j\vec{A}^{(j)}.$$

上例说明 $\mathrm{diag}_m(\lambda)A=A\mathrm{diag}_n(\lambda)=\lambda A$. 特别地,

$$O_mA=AO_n=O_{m\times n}\quad\text{和}\quad E_mA=AE_n=A.$$

矩阵的乘法大大化简了我们对线性方程组和线性映

射的表示. 设 $A=(a_{i,j})\in\mathbb{R}^{m\times n}$. 则齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1+\cdots+a_{1,n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1+\cdots+a_{m,n}x_n=0 \end{cases}$$

除了可以写为向量形式 $\sum_{j=1}^{n}x_j\vec{A}^{(j)}=\mathbf{0}_m$ 外, 还可以写为乘法形式

$$A\mathbf{x}=\mathbf{0}_m,$$

其中 $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)^t$. 类似地, 设 $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^m$. 则以 $(A|\mathbf{b})$ 为增广矩阵的线性方程组, 除了可以写为向量形式

$$\sum_{j=1}^{n}x_j\vec{A}^{(j)}=\mathbf{b}$$

外, 还可以写为乘法形式

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}.$$

设 $\phi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ 是线性映射, 它在标准基下的矩阵是 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$. 则对任意 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$,

$$\phi(\mathbf{x})=A\mathbf{x}.$$

6.3 矩阵运算的规律

加法. 设 $A,B,C\in\mathbb{R}^{m\times n}$.

(A1) 交换律: $A+B=B+A$.

(A2) 结合律: $(A+B)+C=A+(B+C)$.

(A3) 加法单位元: $A+O_{m\times n}=A$.

(A4) 加法逆元: $A+(-A)=O_{m\times n}$.

数乘. 设 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 和 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$.

(S1) 结合律: $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$.

(S2) 数乘单位元: $1A=A$.

以上规律由实数的运算规律可直接推出.

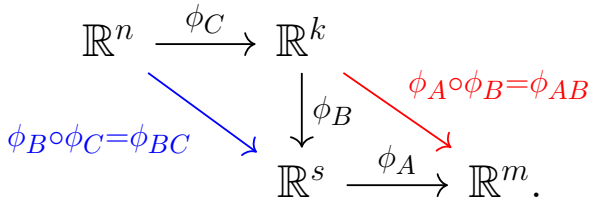
命题 6.9 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times s},B\in\mathbb{R}^{s\times k},C\in\mathbb{R}^{k\times n}$. 则

$$(AB)C=A(BC).$$

证明. 考虑线性映射:

$$\phi_A:\mathbb{R}^s\longrightarrow\mathbb{R}^m,\ \phi_B:\mathbb{R}^k\longrightarrow\mathbb{R}^s,\ \phi_C:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^k.$$

我们有交换图:



根据第一章第二讲定理 4.11, $(\phi_A \circ \phi_B) \circ \phi_C = \phi_A \circ (\phi_B \circ \phi_C)$. 由矩阵乘法的定义可知,

$$(\phi_A \circ \phi_B) \circ \phi_C = \phi_{AB} \circ \phi_C = \phi_{(AB)C}$$

和

$$\phi_A \circ (\phi_B \circ \phi_C) = \phi_A \circ \phi_{BC} = \phi_{A(BC)}.$$

于是, $\phi_{(AB)C} = \phi_{A(BC)}$.

根据上一讲定理 6.5, $(AB)C = A(BC)$. □

乘法. 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times s}, B \in \mathbb{R}^{s\times k}, C \in \mathbb{R}^{k\times n}$.

(M1) 结合律: $(AB)C = A(BC)$.

(M2) 数乘单位元: $E_m A = A E_s = A$.

设 A 是 n 阶方阵. $A^0 := E$. 对 $k \in \mathbb{Z}^+$, $A^k := \underbrace{A \cdots A}_{k}$.

例 6.10 计算 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^k$, 其中 k 是任意正整数.

解. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. 则

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

断言. 如果 $k = 2m$, 其中 $m \in \mathbb{Z}^+$, 则 $A^k = E$.

断言的证明. 当 $m=1$ 时, 断言成立. 设 $m>1$ 且 $m-1$ 时, 断言成立. 则

$$A^{2m}=A^{2(m-1)}A^2=EE=E.$$

故断言成立.

当 $k=2m+1$. $A^k=A^{2m}A=EA=A$, 其中 $m\in\mathbb{N}$.

综上所述

$$A^k=\begin{cases}A & \text{如果 } k \text{ 是奇数},\\ E & \text{如果 } k \text{ 是偶数}.\end{cases}$$

加法与数乘的分配律. 设 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 和 $A,B\in\mathbb{R}^{m\times n}$.

(AS1) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$.

(AS2) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$.

数乘与乘法的分配律. 设 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $A\in\mathbb{R}^{m\times s}$, $B\in\mathbb{R}^{s\times n}$.

(SM) $(\alpha A)(\beta B)=(\alpha\beta)AB$.

加法与乘法的分配律. 设 $A,B\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $C\in\mathbb{R}^{k\times m}$, $D\in\mathbb{R}^{n\times \ell}$.

(AM1) 左分配律: $C(A+B)=CA+CB$.

(AM2) 右分配律: $(A+B)D=AD+BD$.

我们来验证 (AM1). 其它验证或者是直接的或者与下述验证类似.

设 $A=(a_{i,j})_{m\times n}$, $B=(b_{i,j})_{m\times n}$, $C=(c_{p,i})_{p\times m}$ 和 $G=C(A+B)=(g_{p,j})_{k\times n}$. 则

$$g_{p,j}=\sum_{i=1}^{m}c_{p,i}(a_{i,j}+b_{i,j})=\underbrace{\sum_{i=1}^{m}c_{p,i}a_{i,j}}_{CA\text{ 中 }i\text{ 行 }j\text{ 列处元素}}+\underbrace{\sum_{i=1}^{m}c_{p,i}b_{i,j}}_{CB\text{ 中 }i\text{ 行 }j\text{ 列处元素}}.$$

因为 $p=1,\ldots,m$ 和 $j=1,\ldots,n$, 所以 $G=CA+CB$.

转置的计算规律

(AT) 设 $A,B\in\mathbb{R}^{m\times n}$. 则 $(A+B)^t=A^t+B^t$.

(ST) 设 $\alpha\in\mathbb{R}$ 和 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$. 则 $(\alpha A)^t=\alpha A^t$

(MT) 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times s},B\in\mathbb{R}^{s\times n}$. 则 $(AB)^t=B^tA^t$.

规律 (AT) 和 (ST) 可直接验证, (MT) 验证如下:

设 $A=(a_{i,k})_{m\times s}$, $B=(b_{k,j})_{s\times n}$, $C=(c_{i,j})_{m\times n}=AB$. 再设 $A^t=(a'_{k,i})_{s\times m}$ 和 $B^t=(b'_{j,k})_{n\times s}$. 则 $a'_{k,i}=a_{i,k}$ 和 $b'_{j,k}=b_{k,j}$. 令 $D=(d_{j,i})_{n\times m}=B^tA^t$. 我们计算

$$d_{j,i}=\sum_{k=1}^{s}b'_{j,k}a'_{k,i}=\sum_{k=1}^{s}a_{i,k}b_{k,j}=c_{i,j}.$$

故 $C^t=D$. □

最后, 我们来看矩阵乘积对秩的影响.

命题 6.11 设 $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 则 $\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$.

证明. 由加法的定义可知:

$$A + B = \left(\vec{A}^{(1)} + \vec{B}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(n)} + \vec{B}^{(n)}\right).$$

故 $V_c(A+B) \subset V_c(A) + V_c(B)$. 于是, 根据维数的性质(命题 2.14 和 2.15) 可知

$$\dim V_c(A+B) \leq \dim\left(V_c(A) + V_c(B)\right) \leq \dim(V_c(A)) + \dim(V_c(B)).$$

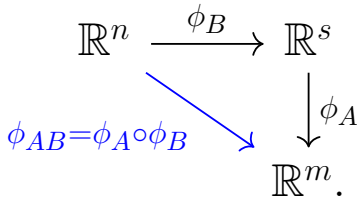
由此可知, $\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$. □

定理 6.12 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times s}, B \in \mathbb{R}^{s\times n}$. 则

(i) $\operatorname{rank}(AB) \leq \min(\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B))$;

(ii) $\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) - s \leq \operatorname{rank}(AB)$ *(Sylvester 不等式)*.

证明. 考虑线性映射 $\phi_A : \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 和 $\phi_B : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^s$. 我们有下列交换图:



(i) 直接计算得:

$$\operatorname{im}(\phi_{AB}) = \phi_A(\operatorname{im}(\phi_B)). \tag{2}$$

因为 $\mathrm{im}(\phi_B) \subset \mathbb{R}^s$, 所以 (2) 蕴含

$$\mathrm{im}(\phi_{AB}) \subset \phi_A(\mathbb{R}^s) = \mathrm{im}(\phi_A).$$

故 $\dim(\mathrm{im}(\phi_{AB})) \leq \dim(\mathrm{im}(\phi_A)) \implies \mathrm{rank}(AB) \leq \mathrm{rank}(A)$. 根据命题 5.11 (i) 和 (2), $\dim(\mathrm{im}(\phi_{AB})) \leq \dim(\mathrm{im}(\phi_B))$, 即 $\mathrm{rank}(AB) \leq \mathrm{rank}(B)$. 综上所述, (i) 成立.

(ii) 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d$ 是 $\ker(\phi_A) \cap \mathrm{im}(\phi_B)$ 的一组基, $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d$ 是 $\mathrm{im}(\phi_B)$ 的一组基. 则 $\mathrm{rank}(B) = d + k$.

断言. $\mathrm{rank}(AB) = k$.

断言的证明. 设 $\alpha_1\phi_A(\mathbf{u}_1) + \cdots + \alpha_k\phi_A(\mathbf{u}_k) = \mathbf{0}_m$, 其中 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. 则

$$\phi_A(\underbrace{\alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{u}_k}_{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}_m,$$

于是, $\mathbf{u} \in \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d \rangle$. 因为 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ 线性无关, 所以 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$. 于是, $\phi_A(\mathbf{u}_1), \ldots, \phi_A(\mathbf{u}_k)$ 线性无关.

因为 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \in \mathrm{im}(\phi_B)$, 所以 (2) 蕴含 $\phi_A(\mathbf{u}_1), \ldots, \phi_A(\mathbf{u}_k)$ 是 $\mathrm{im}(\phi_{AB})$ 中的一组线性无关向量.

设 $\mathbf{y} \in \mathrm{im}(\phi_{AB})$. 根据 (2), 存在 $\mathbf{z} \in \mathrm{im}(\phi_B)$ 使得 $\mathbf{y} = \phi_A(vz)$. 则存在 $\beta_1, \ldots, \beta_d, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{z} = \beta_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_d\mathbf{v}_d + \lambda_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \lambda_k\mathbf{u}_k.$$

于是, $\mathbf{y} = \phi_B(\mathbf{z}) = \lambda_1\phi_A(\mathbf{u}_1) + \cdots + \lambda_k\phi_A(\mathbf{u}_k)$. 由此可知, $\phi_A(\mathbf{u}_1), \ldots, \phi_A(\mathbf{u}_k)$ 是 $\mathrm{im}(\phi_{AB})$ 的一组基. 断言成立.

由对偶定理(线性映射版)可知,

$$\dim(\mathrm{im}(\phi_A)) = s - \dim(\ker(\phi_A)) \leq s - d.$$

于是, $\mathrm{rank}(B) + \mathrm{rank}(A) - s \leq d + k + s - d - s = k$. 根据上述断言, (ii) 成立. □

推论 6.13 *设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, B 是 m 阶满秩方阵, C 是 n 阶满秩方阵. 则* $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(BA) = \mathrm{rank}(AC)$.

证明. 由上述定理的两个不等式可知

$$\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)-m \leq \mathrm{rank}(BA) \leq \min(\mathrm{rank}(B), \mathrm{rank}(A)).$$

因为 $\mathrm{rank}(B) = m$, 所以 $\mathrm{rank}(A) \leq \mathrm{rank}(BA) \leq \mathrm{rank}(A)$. 故 $\mathrm{rank}(BA) = \mathrm{rank}(A)$. 另一个等式可以类似地证明. □