中国科学院大学

试 题 专 用 纸

课程编号：B01GB001H-B01

课程名称：线性代数I-B (期中试卷)

任课教师：李子明、赵明阳

注意事项：

1. 考试时间为90分钟，考试方式闭卷；
2. 全部答案写在答题纸上；
3. 考试结束后，请将本试卷和答题纸、草稿纸一并交回。

---

1. (20分) 设齐次线性方程组 (H) 是 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 + 5x_3 + x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$

(i) 计算该齐次线性方组的系数矩阵 A, 判定 (H) 是否确定并说明理由.

(ii) 设 $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, (L) 是以 $(A|\mathbf{b})$ 增广矩阵的线性方程组. 判定 (L) 是否相容并说明理由.

解. *(i)* 系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

因为 *(H)* 的方程个数少于未知数个数, 所以它不确定.

(ii) 根据初等行变换,

$$(A|\mathbf{b}) \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

故 *(L)* 不相容.

2. (20分) 设置换 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 7 & 5 & 8 & 3 & 10 & 9 \end{pmatrix}$.

(i) 把 σ 写成互不相交的循环之积.

(ii) 计算 σ 的阶, 并确定 σ 的奇偶性.

解. *(i)* $\sigma = (142)(36578)(9\underline{10})$.

(ii) $\mathrm{ord}(\sigma) = \mathrm{lcm}(3,5,2) = 30$.

σ 的符号是 $(-1)^{2+4+1} = -1$.

3. (20分) 设 n 正整数, S_n 是关于 $1,2,\ldots,n$ 置换的集合, $\sigma \in S_n$. 设 k_1, k_2 是集合 $[n] := \{1,2,\ldots,n\}$ 中的两个元素. 如果存在 $m \in \mathbb{Z}$ 使得 $k_1 = \sigma^m(k_2)$, 则称 k_1, k_2 有关系 $\sim_\sigma$, 记为 $k_1 \sim_\sigma k_2$.

(i) 验证: $\sim_\sigma$ 是 $[n]$ 上的等价关系.

(ii) 设 $k \in [n]$ 且 $\sigma(k) \neq k$. 再设 σ 中含有 k 的循环是

$$(k, \sigma(k), \ldots, \sigma^{l-1}(k)).$$

证明: k 关于 $\sim_\sigma$ 的等价类等于 $\{k, \sigma(k), \ldots, \sigma^{l-1}(k)\}$.

解. *(i)* 设 k 是 $[n]$ 中的任意元素. 则 $k = \sigma^0(k)$. 故 $k \sim_\sigma k$. 自反性成立.

设 $k, l \in [n]$ 且 $k \sim_\sigma l$. 则存在 $m \in \mathbb{Z}$, 使得 $k = \sigma^m(l)$. 则 $l = \sigma^{-m}(k)$. 故 $l \sim_\sigma k$. 对称性成立.

设 $h, k, l \in [n]$ 且 $h \sim_\sigma k$ 和 $k \sim_\sigma l$. 则存在 $i, j \in \mathbb{Z}$, 使得 $h = \sigma^i(k)$ 和 $k = \sigma^j(l)$. 则 $h = \sigma^{i+j}(l)$. 故 $h \sim_\sigma l$. 故 $l \sim_\sigma k$. 传递性成立.

(ii) 根据等价关系的定义, 循环 $(k, \sigma(k), \ldots, \sigma^{l-1}(k))$ 中的每一个整数都在 k 关于 $\sim_\sigma$ 的等价类中.

设 $i \in [n]$ 且 $k \sim_\sigma i$. 则存在 $j \in \mathbb{Z}$ 使得 $i = \sigma^j(k)$. 由整除除法得

$$j = ql + r,$$

其中 $q \in \mathbb{Z}$ 和 $r \in \{0, 1, \ldots, l-1\}$. 故

$$i = \sigma^{ql+r}(k) = \begin{cases} \sigma^r \underbrace{\sigma^l \cdots \sigma^l}_{q}(k) & \text{如果 } q \geq 0, \\ \sigma^r \underbrace{\sigma^{-l} \cdots \sigma^{-l}}_{-q}(k) & \text{如果 } q < 0. \end{cases}$$

所以 $i = \sigma^r(k)$. 于是, i 是上述循环中的一个整数.

综上所述, k 关于 $\sim_\sigma$ 的等价类等于 $\{k, \sigma(k), \ldots, \sigma^{l-1}(k)\}$.

4. (20分) 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$. 证明:

(i) 如果非零向量 $\mathbf{u}$ 是 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 的线性组合, 则存在 $i \in \{1, \ldots, k\}$ 使得 $\mathbf{v}_i$ 是

$$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_k$$

的线性组合;

(ii) 如果 $k > n+1$, 则存在 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, 不全为零, 满足

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0} \quad \text{且} \quad \alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 0.$$

解. (i) 设 $\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k$, 其中 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. 因为 $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, 所以 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ 不全为零.

不妨设 $\alpha_1 \neq 0$. 则

$$-\alpha_1\mathbf{v}_1 = -\mathbf{u} + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k.$$

由此得到

$$\mathbf{v}_1 = \alpha_1^{-1}\mathbf{u} + (-\alpha_1^{-1}\alpha_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (-\alpha_1^{-1}\alpha_k)\mathbf{v}_k.$$

故 $\mathbf{v}_1$ 是 $\mathbf{u}, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ 的线性组合.

(ii) 第一个要证明的结论 $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ 等价于一个由 n 个关于 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ 的方程构成的齐次线性方程组不确定.

再加上 $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 0$. 我们得到一个由 $n+1$ 个关于 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ 的方程构成的齐次线性方程组 *(H)*. 因为 $k > n+1$, 所以 *(H)* 有非平凡解 *(*红色推论*)*. 任何一组这样的非平凡解给出一组所需的 $\alpha_1, \ldots \alpha_k$.

(ii) 的另解*:* 因为 $k-1 > n$, 所以向量 $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_k$, …, $\mathbf{v}_{k-1} - \mathbf{v}_k$ 线性相关. 故存在

$$\beta_1, \ldots, \beta_{k-1} \in \mathbb{R}$$

不全为零使得

$$\beta_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_k) + \cdots + \beta_{k-1}(\mathbf{v}_{k-1} - \mathbf{v}_k) = \mathbf{0}.$$

令 $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_{k-1} = \beta_{k-1}$ 和 $\alpha_k = -(\beta_1 + \cdots + \beta_{k-1})$ 即可.

5. (10分) 设向量 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^5$ 线性无关.

(i) 计算 $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1$ 的一个极大线性无关组.

(ii) 证明: 存在两个 4 维子空间 W_1, W_2 使得

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = W_1 \cap W_2.$$

解: (i) 我们先验证 $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ 和 $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$ 线性无关. 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 使得

$$\alpha(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + \beta(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) = \mathbf{0}.$$

则 $\alpha\mathbf{v}_1 + (\beta - \alpha)\mathbf{v}_2 - \beta\mathbf{v}_3 - \mathbf{0}$. 因为 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 线性无关, 所以 $\alpha = \beta = 0$. 故 $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ 和 $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$ 线性无关.

因为 $(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) + (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1) = \mathbf{0}$, 所以 $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1$ 线性相关. 故 $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$ 是 $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1$ 的一个极大线性无关组.

(ii) 根据基扩张定理, $\mathbb{R}^5$ 有一组基 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5$. 设

$$W_1 = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle \quad 和 \quad W_2 = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_5 \rangle.$$

则 W_1 和 W_2 都是 *4* 维子空间.

下面验证 $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = W_1 \cap W_2$. 因为 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in W_1$, 所以 $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle \subset W_1$. 同理 $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle \subset W_2$. 故 $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle \subset W_1 \cap W_2$. 根据维数公式:

$$\dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 + W_2) = 4 + 4 - 5 = 3$$

和 $\dim\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = 3$, 我们得到 $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = W_1 \cap W_2$.

6. (10分) 设 V_1 和 V_2 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间满足

$$V_1 \neq \mathbb{R}^n, \quad V_2 \neq \mathbb{R}^n, \quad V_1 \cap V_2 \neq \{\mathbf{0}\} \quad 和 \quad \mathbb{R}^n = V_1 + V_2.$$

证明:

(i) $V_1 \cap V_2 \neq V_2$ 和 $\dim(V_1) + \dim(V_2) > n$;

(ii) 存在 $\mathbb{R}^n$ 的子空间 W 使得 $W \subsetneq V_2$ 和 $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus W$.

注: 两个集合 S 和 T 满足 $S \subsetneq T$ 是指 S 是 T 的子集且 $S \neq T$.

证明: (i) 显然 $V_1 \cap V_2 \subset V_2$. 如果 $V_1 \cap V_2 = V_2$, 则 $V_2 \subset V_1$. 故 $V_1 + V_2 = V_1$. 由此可知, $V_1 = \mathbb{R}^n$, 矛盾.

因为 $\mathbb{R}^n = V_1 + V_2$, 所以 $\dim(V_1 + V_2) = n$. 根据维数的定义和维数公式,

$$\dim(V_1 \cap V_2) > 0 \quad 和 \quad \dim(V_1) + \dim(V_2) = n + \dim(V_1 \cap V_2),$$

我们有 $\dim(V_1)+\dim(V_2)>n$.

(ii) 设 $U=V_1\cap V_2$ 和 $d=\dim(U)$. 则 U 有一组基 $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_d$. 把该基扩充为 V_2 的一组基: $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_d,\mathbf{u}_{d+1},\dots,\mathbf{u}_k$. 令 $W:=\langle\mathbf{u}_{d+1},\dots,\mathbf{u}_k\rangle$. 则 $W\subseteq V_2$. 因为 $U\neq V_2$, 所以 $W\neq V_2$.

下面验证: $V_1\cap W=\{\mathbf{0}\}$. 设 $\mathbf{v}\in V_1\cap W$. 因为 $\mathbf{v}\in U$ 且 $\mathbf{v}\in W$, 所以 $\mathbf{v}$ 既是 $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_d$ 的线性组合又是 $\mathbf{u}_{d+1},\dots,\mathbf{u}_k$ 的线性组合. 又因为

$$\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_d,\mathbf{u}_{d+1},\dots,\mathbf{u}_k$$

线性无关, 所以 $\mathbf{v}=\mathbf{0}$. 故 V_1+W 是直和.

注意到

$$\begin{aligned}
n&=\dim(V_1+V_2) && \text{(题目条件)}\\
&=\dim(V_1)+\dim(V_2)-\dim(V_1\cap V_2) && \text{(维数公式)}\\
&=\dim(V_1)+k-d && (\dim(V_2)=k,\ \dim(V_1\cap V_2)=d)\\
&=\dim(V_1)+\dim(W) && (\dim(W)=k-d)\\
&=\dim(V_1+W). && (V_1+W \text{ 是直和})
\end{aligned}$$

综上所述, $\mathbb{R}^n=V_1\oplus W$.

(ii) 的另解. *(*不用维数公式*)* 设子空间 U 和 $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_d,\mathbf{u}_{d+1},\dots,\mathbf{u}_k$ 同上. 再设

$$\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_d,\mathbf{v}_{d+1},\dots,\mathbf{v}_l$$

是 V_1 的一组基.

断言. $\mathbf{v}_{d+1},\dots,\mathbf{v}_l,\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_d,\mathbf{u}_{d+1},\dots,\mathbf{u}_k$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基.

断言的证明. 直接计算得

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^n&=V_1+V_2 && \text{(题目条件)}\\
&=\langle\mathbf{v}_{d+1},\dots,\mathbf{v}_l,\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_d\rangle+\langle\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_d,\mathbf{u}_{d+1},\dots,\mathbf{u}_k\rangle && \text{(基底选取)}\\
&=\langle\mathbf{v}_{d+1},\dots,\mathbf{v}_l,\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_d,\mathbf{u}_{d+1},\dots,\mathbf{u}_k\rangle
\end{aligned}$$

*(*上课证明过: 设 $S,T\subset\mathbb{R}^n$ 非空. 则 $\langle S\rangle+\langle T\rangle=\langle S\cup T\rangle$*)*.

故只需证明: $\mathbf{v}_{d+1},\dots,\mathbf{v}_l,\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_d,\mathbf{u}_{d+1},\dots,\mathbf{u}_k$ 线性无关即可.

设 $\alpha_{d+1},\dots,\alpha_l,\beta_1,\dots,\beta_d,\beta_{d+1},\dots,\beta_n\in\mathbb{R}$ 使得

$$\underbrace{\alpha_{d+1}\mathbf{v}_{d+1}+\cdots+\alpha_l\mathbf{v}_l}_{\mathbf{v}}+\underbrace{\beta_1\mathbf{u}_1+\cdots+\beta_d\mathbf{u}_d}_{\mathbf{u}}+\underbrace{\beta_{d+1}\mathbf{u}_{d+1}+\cdots+\beta_k\mathbf{u}_k}_{\mathbf{w}}=\mathbf{0}.$$

则 $\mathbf{v}=-\mathbf{u}-\mathbf{w}\in V_2$. 故 $\mathbf{v}\in V_1\cap V_2=U$. 于是 $\mathbf{v}$ 既是 $\mathbf{v}_{d+1},\dots,\mathbf{v}_l$ 的线性组合又是 $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_d$ 的线性组合. 因为 $\mathbf{v}_{d+1},\dots,\mathbf{v}_l,\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_d$ 线性无关, 所以 $\mathbf{v}=\mathbf{0}$. 故 $\alpha_{d+1}=\cdots=\alpha_l=0$. 进而 $\mathbf{u}+\mathbf{w}=\mathbf{0}$. 又因为 $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_{d+1},\mathbf{u}_{d+1},\dots,\mathbf{u}_k$ 线性无关, 所以 $\beta_1=\cdots=\beta_d=\beta_{d+1}=\cdots=\beta_k=0$. 断言成立.

令 $W=\langle\mathbf{u}_{d+1},\dots,\mathbf{u}_k\rangle$. 因为 $U\neq\{\mathbf{0}\}$, 所以 $d>0$. 于是 $k-d<k$. 我们有 $W\subsetneq V_2$.

由断言可知, $\mathbb{R}^n=V_1+W$. 设 $\mathbf{x}\in V_1\cap W$. 则 $\mathbf{x}$ 既是 $\mathbf{v}_{d+1},\dots,\mathbf{v}_l,\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_d$ 的线性组合又是 $\mathbf{u}_{d+1},\dots,\mathbf{u}_k$ 的线性组合. 因为 $\mathbf{v}_{d+1},\dots,\mathbf{v}_l,\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_d,\mathbf{u}_{d+1},\dots,\mathbf{u}_k$ 的线性无关, 所以 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$. 故 $V_1\cap W=\{\mathbf{0}\}$. 我们得到 $\mathbb{R}^n=V_1\oplus W$.